

Potencias y radicales de números reales

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Potencias de exponente natural

La potencia de base **a** y exponente **n** $\in \mathbb{N}$ es el producto de n factores iguales a la base.

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}}$$

Ejemplos:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000$$

Operando con potencias de la misma base

| DESCRIPCIÓN | | EJEMPLO |
|--|--------------------------------------|---------------------------------------|
| Producto de potencias de la misma base | $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$ | $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 729$ |
| Cociente de potencias de la misma base | $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (m > n)$ | $\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$ |
| Potencia de una potencia | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ | $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$ |

Operando con potencias del mismo exponente

| DESCRIPCIÓN | EJEMPLO | |
|--|--|---|
| Producto de potencias con el mismo exponente | $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ | $3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$ |
| Cociente de potencias con el mismo exponente | $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ | $\frac{6^4}{2^4} = \left(\frac{6}{2}\right)^4 = 3^4 = 81$ |
| Potencia de una potencia | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ | $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$ |

Ampliando potencias con exponente entero

Si deseamos ampliar el concepto de potencia para exponentes enteros, tendremos que definir cuanto vale a^0 , a^1 y a^{-1}

| DESCRIPCIÓN | JUSTIFICACIÓN | EJEMPLOS |
|------------------------|--|------------------------|
| $a^0 = 1$ | $1 = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$ | $3^0 = 1$ $8^0 = 1$ |
| $a^1 = a$ | $\frac{a^m}{a^{m-1}} = \frac{a}{a} \cdot \frac{a}{a} \cdots \frac{a}{a} \cdot a = a$ | $3^1 = 3$ $8^1 = 8$ |
| $a^{-1} = \frac{1}{a}$ | $\frac{a^{m-1}}{a^m} = \frac{a}{a} \cdot \frac{a}{a} \cdots \frac{a}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$ | $3^{-1} = \frac{1}{3}$ |

Algunas observaciones

Podemos considerar que a^{-1} es el inverso de a :

$$a^{-1} \cdot a = a^{1+(-1)} = a^0 = 1 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$$

a^{-n} es la n -ésima potencia del inverso de a :

$$a^{-n} = a^{-1 \cdot n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Cuando una potencia aparece combinada con otras operaciones debe evaluarse tras los paréntesis y antes de ser evaluados los productos y las divisiones.

$$3 \cdot 2^3 - 3^4 + 12 = 3 \cdot 8 - 81 + 12 = -45$$

Notación científica

La notación científica permite realizar las operaciones de forma más sencilla con números muy grandes o muy pequeñas. Además nos ofrecen una idea clara de la magnitud de un número.

Consiste en expresar un número de la forma $a \cdot 10^n$ de tal forma que:

a es un número decimal cuya parte entera consta de un único dígito distinto de cero (mantisa).

n es un número entero (exponente).

| DESCRIPCIÓN | |
|--|------------------------------------|
| La masa de un electrón | $9,109\ 382\ 2 \times 10^{-31}$ kg |
| Circunferencia de la Tierra | 4×10^7 m |
| Número de neuronas (aprox) de un ser humano | 1×10^{11} |

Expresar un número en notación decimal

$$234567,89 = 234567,89 \cdot 10^0$$

$$234567,89 = 23456,789 \cdot 10^1$$

$$234567,89 = 2345,6789 \cdot 10^2$$

$$234567,89 = 234,56789 \cdot 10^3$$

$$234567,89 = 23,456789 \cdot 10^4$$

$$234567,89 = 2,3456789 \cdot 10^5$$

$$0,000000123 = 0,000000123 \cdot 10^0$$

$$0,000000123 = 0,00000123 \cdot 10^{-1}$$

$$0,000000123 = 0,0000123 \cdot 10^{-2}$$

$$0,000000123 = 0,000123 \cdot 10^{-3}$$

$$0,000000123 = 0,00123 \cdot 10^{-4}$$

$$0,000000123 = 0,0123 \cdot 10^{-5}$$

$$0,000000123 = 0,123 \cdot 10^{-6}$$

$$0,000000123 = 1,23 \cdot 10^{-7}$$

Prefijos del sistema internacional

| Prefijo | Factor | Prefijo | Factor |
|---------|-----------|---------|------------|
| deca | 10^1 | deci | 10^{-1} |
| hecto | 10^2 | centi | 10^{-2} |
| kilo | 10^3 | mili | 10^{-3} |
| miria | 10^4 | micro | 10^{-6} |
| mega | 10^6 | nano | 10^{-9} |
| giga | 10^9 | pico | 10^{-12} |
| tera | 10^{12} | fento | 10^{-15} |
| peta | 10^{15} | ato | 10^{-18} |
| exa | 10^{18} | | |



Operaciones en notación decimal

Suma o resta:

Para operar ambos números tienen que estar expresados con la misma potencia de 10:

$$\begin{aligned} 3,2 \cdot 10^7 + 1,05 \cdot 10^5 &= 320 \cdot 10^5 + 1,05 \cdot 10^5 = (320 + 1,05) \cdot 10^5 = 321,05 \cdot 10^5 \\ &= 3,2105 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

Producto:

Multiplicamos los decimales y sumamos los exponentes de las potencia:

$$3,2 \cdot 10^7 \cdot 1,05 \cdot 10^5 = 3,2 \cdot 1,05 \cdot 10^{7+5} = 4,8 \cdot 10^{12}$$

División:

Divimos los decimales y restamos los exponentes de las potencia:

$$3,2 \cdot 10^7 \cdot 1,05 \cdot 10^5 = 3,2 \cdot 1,05 \cdot 10^{7+5} = 4,8 \cdot 10^{12}$$



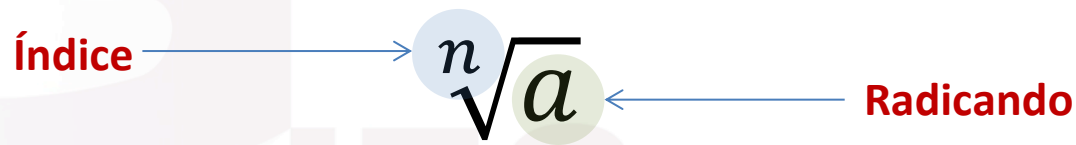
RADICALES

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Definición

Se dice que un número real x es la n -ésima raíz (n es un número natural) del número real a si se verifica que:

$$x = \sqrt[n]{a} \iff x^n = a$$



Ejemplos:

$$\sqrt{16} = 4 \text{ pues } 4^2 = 16$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \text{ pues } (-3)^3 = -27$$

$$\sqrt{0,25} = 0,5 \text{ pues } 0,5^2 = 0,25$$

$$\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} \text{ pues } \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ pues } 2^4 = 16$$

Reglas de cálculo con radicales

Expresión de un radical como una potencia de exponente fraccionario

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Producto de radicales del mismo índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Cociente de radicales del mismo índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Potencia de un radical

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Raíz de un radical

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Radicales equivalentes

Hay radicales que expresan el mismo número real, cuando esto ocurre se denominan radicales equivalentes.

Simplificar un radical significa calcular el radical equivalente de menor índice.

Ejemplos:

$$\sqrt{4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[8]{256} = 2$$

$$\sqrt[3]{-5} = \sqrt[6]{-25} = \sqrt[9]{-125}$$

Radicales semejantes

Dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplos: $2\sqrt[3]{-5}$ y $-12\sqrt[3]{-5}$

La simplificación de expresiones con radicales que se encuentran sumando sólo es posible si son semejantes (se utiliza la propiedad distributiva).

Ejemplos:

$$2\sqrt[3]{-5} + 12\sqrt[3]{-5} = (2 + 12)\sqrt[3]{-5} = 14\sqrt[3]{-5}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\sqrt{12} - \frac{1}{2}\sqrt{27} + \frac{2}{3}\sqrt{75} &= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} + \frac{2}{3} \cdot 5\sqrt{3} = \\ &= \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2} + \frac{10}{3}\right)\sqrt{3} = \frac{19}{6}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Racionalización de expresiones

Racionalizar una expresión en cuyo denominador hay radicales consiste en transformarla en otra equivalente en la que no aparezcan radicales en el denominador.

$$\sqrt[n]{a^m}$$

Si el denominador es de esta forma, se habrá de multiplicar el numerador y el denominador por:

$$\sqrt[n]{a^{n-m}}$$

$$\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$$

Si en el denominador aparece una suma o una resta de radicales de índice 2, entonces habrá de multiplicarse por el conjugado.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Expresiones conjugadas

Ejemplos (racionalizar) I

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2\sqrt[3]{2}}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Ejemplos (racionalizar) II

$$\frac{2}{1 - \sqrt{5}} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{1^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{1 - 5} = -\frac{2 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{1(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{3 - 5} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{-2}$$