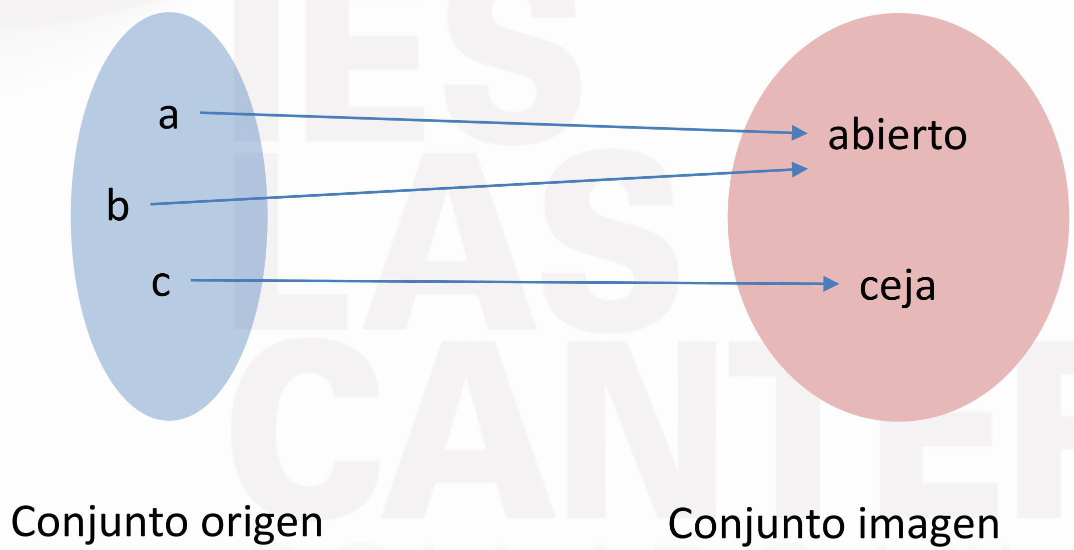
Progresiones aritméticas y geométricas

Aplicación (definición matemática)

Dado un conjunto origen y un conjunto imagen, se define una aplicación como la relación binaria que asocia a cada uno de los elementos del conjunto origen un único elemento del conjunto imagen.



Sucesión de números reales (definición)

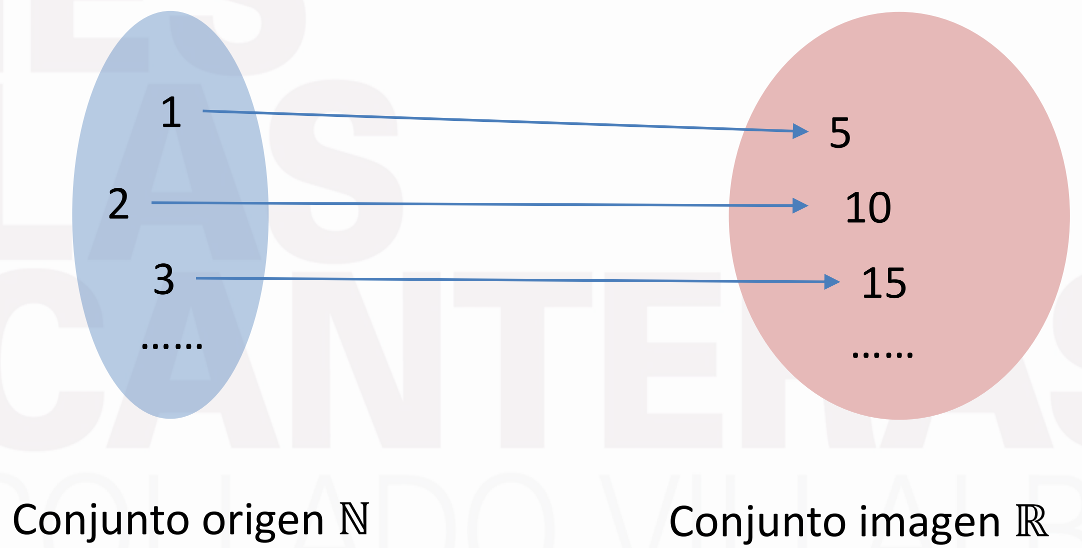
Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales (conjunto origen) en el conjunto de los números reales (conjunto imagen).

El conjunto de los números naturales establece un orden en los elementos del conjunto imagen que tienen un origen.

Ejemplo:

La sucesión formada por los múltiplos de 5:

a_n={5, 10, 15, 20, 25 ….}



Representación de un término

Término de posición …

Elemento de la sucesión que ocupa la posición…

Se denotará por una letra que representa el término y un subíndice, que indica la posición que ocupa el elemento en la sucesión.

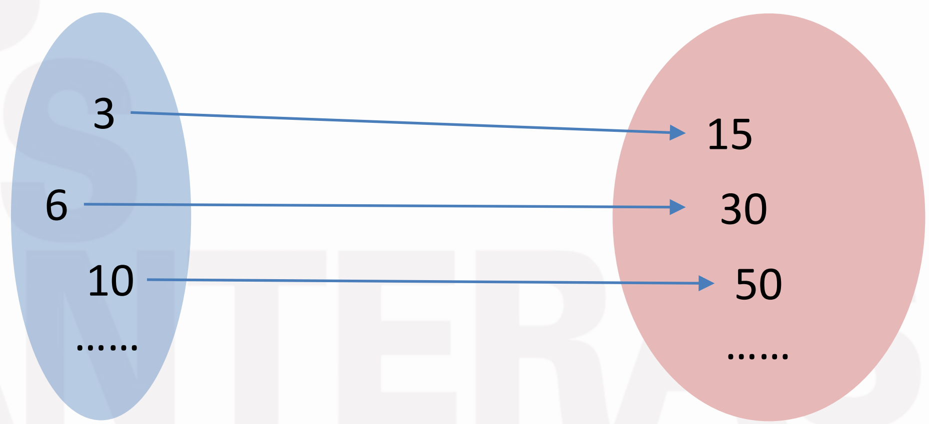
Ejemplo:

En la sucesión formada por los múltiplos de 5: a_n={ 5, 10, 15, 20, 25 ….}

Término de posición 3 $a_3=15$

Término de posición 6 $a_6=30$

Término de posición 10 $a_{10}=50$



Conjunto origen $\mathbb{N}$ Conjunto imagen $\mathbb{R}$

Término general

Término general de una sucesión (término n-ésimo)

Expresión algebraica que permite el cálculo del término de la sucesión en función de la posición que ocupa.

Ejemplo:

En la sucesión formada por los múltiplos de 5: a_n={ 5, 10, 15, 20, 25 ….}

El término general se expresa mediante la expresión:

$$a_n = 5n$$

Para calcular el término de posición 2 $a_2 = 5 \cdot 2 = 10$

Para calcular el término de posición 8 $a_8 = 5 \cdot 8 = 40$

Cómo definir una sucesión

Mediante su término general

Ejemplo:

$$a_n = 5n$$

Declarando la propiedad que cumplen todos y cada uno de sus términos

Ejemplo: la sucesión formada por los múltiplos de 5

Utilizando una expresión recursiva

Ejemplo:

$$a_n = \begin{cases} 3 & si\ n = 1 \\ 5a_{n-1} & si\ n > 1 \end{cases}$$

Ejemplos

Sucesión de los cuadrados de los números naturales:

a_n={ 1, 4, 9, 16, 25….} $a_n = n^2$

Sucesión de los números impares:

b_n={ 1, 3, 5, 7, 9….} $b_n = 2n - 1$

Sucesión de Fibonacci:

c_n={ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…} $c_n = \begin{cases} 1 & si\ n < 3 \\ c_{n-1} c_{n-2} & si\ n \geq 3 \end{cases}$

Sucesión de las potencias de 2:

d_n={ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128…} $d_n = 2^n$

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Definición

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que un término se obtiene a partir del anterior sumándole una cantidad siempre constante, denominada **diferencia**.

En las progresiones aritméticas la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es constante.

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1+d$

$a_3 = a_2 +d = a_1+2d$

$a_4 = a_3 +d = a_1+3d$

.....

$$\mathbf{a_n = a_{n-1} +d = a_1+(n - 1)d}$$

El término general de una progresión aritmética puede expresarse si se conoce su primer término y la diferencia

Ejemplos

+3 +3 +3 +3

5 8 11 14 17

Primer término **5**

Diferencia **3**

Término general: $\mathbf{a_n = 5 + (n-1)3}$

Primer término **10**

Diferencia **-4**

Término general: $\mathbf{a_n = 10 + (n-1)(-4)}$

-4 -4 -4 -4

10 6 2 -2 -6

20 20 20 20

21 41 61 81 101

Primer término **21**

Diferencia **20**

Término general: $\mathbf{a_n = 21 + (n-1)20}$

Ejemplo I

Es posible calcular cualquier término de una progresión aritmética conociendo el primer término y la diferencia.

Calculad el término de posición 50 de una progresión aritmética sabiendo que su primer término es 5 y la diferencia 20.

Solución

$a_n = a_1 + (n-1)d$, por tanto:

$a_{50} = 5 + (50 - 1)20 = 5 + 49 \cdot 20 = 985$

Ejemplo II

Es posible calcular el primer término de una progresión aritmética conociendo cualquier término, el lugar que ocupa y la diferencia.

Calculad el primer término de una progresión aritmética sabiendo que la diferencia es 20 y el término de posición 50 es 985.

Solución

$a_n = a_1 + (n-1)d$, por tanto

$985 = a_1 + (50 - 1)20$;

$985 = a_1 + 980$;

$a_1 = 985 – 980 = 5$

Ejemplo III

Es posible calcular la posición de un término de una progresión aritmética conociendo el primer término y la diferencia.

Calculad la posición que ocupa el término 985 de una progresión aritmética sabiendo que su primer término es 5 y la diferencia 20.

Solución

$a_n = a_1 + (n-1)d$, por tanto,

$985 = 5 + (n - 1)20$;

$980 = (n-1)\cdot 20$;

$n – 1 = 49$, por tanto, $n = 50$

Ejemplo IV

Es posible calcular el término general de una progresión aritmética conociendo dos términos y la posición que éstos ocupan.

Calculad el término general de una progresión geométrica sabiendo que el término de posición 50 es 985 y el de posición 3 es 45.

Solución

$a_3 = a_1 + (3 - 1)d$, por tanto, $45 = a_1 + 2d$

$a_{50} = a_1 + (50 - 1)d$, por tanto, $985 = a_1 + 49d$

Restando miembro a miembro ambas ecuaciones $940 = 47d$

Por tanto $d = 20$;

Sustituyendo en una de las ecuaciones $a_1 = 5$

Interpolación de términos

El problema que consiste en intercalar varios términos entre dos dados se denomina **interpolación**. A los términos calculados, se les denomina **medios aritméticos**.

Ejemplo

Interpolar cuatro medios aritméticos entre 20 y 40

Solución

Sabemos que $a_1 = 20$ y $a_6 = 40$, por tanto,

$40 = 20 + (6 - 1)d$;

$20 = 5d$;

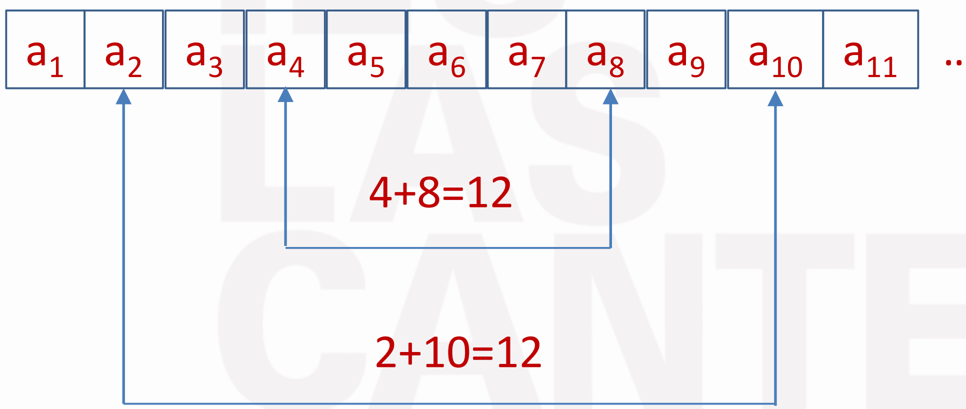
$d = 4$, por tanto, los números buscados son 24, 28, 32 y 36

Términos equidistantes de una progresión

Dos pares de términos de una progresión aritmética son equidistantes cuando la correspondiente suma de sus índices son iguales.

Ejemplo

Los términos a_2 y a_{10} son equidistantes de los términos a_4 y a_8



Suma de términos equidistantes

En una secuencia finita de una progresión aritmética, la suma de términos equidistantes es igual a la suma de los extremos.

Ejemplo

Los 8 primeros términos de la progresión aritmética de primer término 5 y diferencia 2

5	7	9	11	13	15	17	19
a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d	a_1+4d	a_1+5d	a_1+6d	a_1+7d

24
$2a_1+7d$

Suma de términos consecutivos de una progresión aritmética.

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es igual a la semisuma del primero y el último de los términos, multiplicado por el número de éstos.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Donde S_n representa la suma de los n primeros términos, n el número de términos a sumar, a_1 el primer término a sumar y a_n el último término a sumar.

Ejemplo

Ejemplo

Calcula la suma de los 21 primeros términos de las progresión aritmética 41, 38, 35 ….

Solución

Sabemos que el primer término es $a_1 = 41$ y la diferencia es

$d = 38 – 41 = -3$

Por tanto, el término general $a_n = 41+(n-1)(-3)$

Calculamos $a_{21} = 41+(21-1)(-3)= 41 – 60 = -19$.

Utilizando la fórmula de la suma

$$\boldsymbol{S_{21} = \frac{21(41 + (-19))}{2} = 231}$$

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Definición

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que un término se obtiene a partir del anterior multiplicando por una cantidad siempre constante, denominada **razón**.

En las progresiones geométricas el cociente entre dos términos consecutivos siempre es constante.

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 r^3$

…..

$\mathbf{a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}}$

El término general de una progresión geométrica puede expresarse si se conoce su primer término y la razón

Ejemplos

$$5 \xrightarrow{x2} 10 \xrightarrow{x2} 20 \xrightarrow{x2} 40 \xrightarrow{x2} 80$$

Primer término **5**

Razón **2**

Término general: $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

$$1 \xrightarrow{10^{-1}} 0{,}1 \xrightarrow{10^{-1}} 0{,}01 \xrightarrow{10^{-1}} 0{,}001 \xrightarrow{10^{-1}} 0{,}0001$$

Primer término **1**

Razón $\frac{1}{10}$

Término general: $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

$$5 \xrightarrow{x(-1)} -5 \xrightarrow{x(-1)} 5 \xrightarrow{x(-1)} -5 \xrightarrow{x(-1)} 5$$

Primer término **5**

Razón **-1**

Término general: $a_n = 5 \cdot (-1)^{n-1}$

Ejemplo I

Es posible calcular cualquier término de una progresión geométrica conociendo el primer término y la razón.

Calculad el término de posición 10 de una progresión geométrica sabiendo que su primer término es 5 y la razón 2.

Solución

$\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

por tanto, como n =10 :

$a_{10} = 5 \cdot \mathbf{r^{n-1}} = 5 \cdot \mathbf{2^{10-1}} = 5 \cdot 512 = 2.560$

Ejemplo 2

Es posible calcular cualquier término de una progresión geométrica conociendo dos términos y la posición que ocupan en la progresión.

El cuarto término de una progresión geométrica es 27 y su primer término es 1. Calcula los cinco primeros términos de la progresión.

Solución

$a_1 = 1$, el término general queda

$\mathbf{a_n = r^{n-1}}$

El cuarto término es 27, sustituyendo en la anterior expresión:

$27 = \mathbf{r^{4-1}}$, es decir, $r = \sqrt[3]{27} = 3.$

Por tanto, el término general es: $\mathbf{a_n = 3^{n-1}}$ y los 5 primeros términos son: 1, 3, 9, 27 y 81

Ejemplo 3

Es posible calcular la posición que ocupa un término, si conocemos el término general.

En una progresión geométrica el primer término es 3 y la razón 2, uno de sus términos es 12.288. Calcula el lugar que ocupa en la progresión.

Solución

El término general es **$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$**Se trata de calcular n conociendo **a_n**

$12.288 = 3 \cdot 2^{n-1}$ aislando la potencia: **$2^{n-1} = 4096$**

Descomponiendo en potencias de 2: $2^{n-1} = 2^{12}$

De lo que se deduce que n = 13;

Ejemplo 4

Conociendo un término, su posición y la razón, se puede calcular el término general.

En una progresión geométrica de razón $\frac{1}{3}$ se sabe que su cuarto término es 1. Calcula el primer térmio.

Solución

Sabemos que $1 = a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{4-1}$ por tanto $1 = a_1 \cdot \frac{1}{27}$

Es decir, $a_1 = 27$. Siendo el término general:

$$a_n = 27\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Interpolación de términos

El problema que consiste en intercalar varios términos entre dos dados se denomina **interpolación**. A los términos calculados, se les denomina **medios geométricos** o **proporcionales.**

Ejemplo

Interpolar tres medios geométricos entre 4 y 64

Solución

Sabemos que $a_1 = 4$ y $a_5 = 64$, por tanto, $64 = 4r^4$

$r = \pm\sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \pm 2$, una vez calculada la razón podemos calcular los términos:

Para r = 2: 4, 8, 16, 32 y 64

Para r = -2: 4, -8, 16, -32 y 64

Producto de términos equidistantes

En una secuencia finita de una progresión geométrica, el producto de términos equidistantes es igual al producto de los extremos.

Ejemplo

Los 8 primeros términos de la progresión geométrica de primer término 5 y razón 2

5	10	20	40	80	160	320	640
a_1	$a1 \cdot r$	$a_1 \cdot r^2$	$a_1 \cdot r^3$	$a_1 \cdot r^4$	$a_1 \cdot r^5$	$a_1 \cdot r^6$	$a_1 \cdot r^7$

3200
$a_1^2 \cdot r^7$

Producto de términos consecutivos de una progresión geométrica

El producto de los n primeros términos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada del producto de los términos de los extremos elevado al número de términos

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Donde P_n representa el producto de los n primeros términos, n el número de términos a multiplicar, a_1 el primer término y a_n el último término.

Ejemplo

Ejemplo

Calcula el producto de los 6 primeros términos de las progresión geométrica 2, 6, 18, 54 ….

Solución

Sabemos que el primer término es $a_1 = 2$ y la razón es

$r = 6/2 = 3$

Por tanto, el término general $a_n = 2 \cdot r^{n-1}$

Calculamos $a_6 = 2 \cdot 3^{6-1} = 486$.

Utilizando la fórmula del producto

$$P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \sqrt{(2 \cdot 486)^6} = 918.330.048$$

Suma de términos consecutivos de una progresión geométrica

La suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión geométrica es igual a:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}, r \neq 1$$

Donde:

S_n Suma de los n términos

a_1 Primer término de la progresión

a_n Último término de la progresión a sumar

r Razón de la progresión geométrica

Ejemplo

Ejemplo

Calcula la suma de los 8 primeros términos de las progresión geométrica 2, 6, 18, 54 ….

Solución

Sabemos que el primer término es $a_1 = 2$ y la razón es

$r = 6/2 = 3$

Por tanto, el término general $a_n = 2 \cdot r^{n-1}$

Calculamos $a_8 = 2 \cdot 3^{8-1} = 4374$.

Utilizando la fórmula de la suma

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{4374 \cdot 3 - 2}{3 - 1} = 13.121}$$