Ejercicios resueltos

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Calculad A^{-1}

   b) Calcula la matriz X tal que $AX = A + B$

   ## Solución.

   a. Sabemos que la matriz inversa se calcula mediante la expresión:

   $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t$$

   $$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 3(3-2) = 3$$

   $$Adj(A) = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   b. Puesto que la matriz A es inversible:

   $$AX = A + B \ multiplicando\ por\ la\ inversa\ en\ ambos\ términos$$

   $$A^{-1}AX = A^{-1}A + A^{-1}B \ \ por\ tanto\ X = I + A^{-1}B$$

   $$A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 21 \\ 3 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   $$X = I + A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 21 \\ 3 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Un comerciante compró 200 kilos de melocotones, 100 de manzanas y 300 de peras. Los vende incrementando un 25% el precio de los melocotones y de las manzanas y un 40% el de peras. Por la venta de todo el género obtuvo 1087 euros de los que 257 fueron beneficio. Sabiendo que el precio de compra del kilo de melocotones fue 50 céntimos más caro que el del kilo de peras, ¿cuál es el precio de compra del kilo de cada una de las frutas?

Solución.

Primero definiremos las incógnitas a utilizar:

$x \equiv Precio\ de\ compra\ de\ los\ melocotones$

$y \equiv Precio\ de\ compra\ de\ las\ manzanas$

$z \equiv Precio\ de\ compra\ de\ las\ peras$

El comerciante compró la fruta por un total de 1087 – 257 = 830 €, por tanto:

$200x + 100y + 300z = 830$

El beneficio obtenido es gracias al incremento del precio, por tanto:

$0.25 \cdot 200x + 0.25 \cdot 100y + 0.5 \cdot 300z = 257, simplificando, 50x + 25y + 150 = 257$

Por último, la relación entre el precio de las peras y los melocotones puede expresarse como:

$x = z + 0.5\ , es\ decir, x - z = 0.5$

El sistema lineal queda como:

$$\begin{cases} 200x + 100y + 300z = 830 \\ 50x + 25y + 120z = 257 \\ x - z = 0.5 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema utilizando el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 830 & 100 & 300 \\ 257 & 25 & 120 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7200}{4500} = 1.6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 830 & 300 \\ 50 & 257 & 120 \\ 1 & 0.5 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{8100}{4500} = 1.8$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 100 & 830 \\ 50 & 25 & 257 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4950}{4500} = 1.1$$

3. Un restaurante ofrece cada día desayunos, comidas y cenas. Los desayunos cuestan 4 euros, las comidas 8 y las cenas 10. El último día se sirvieron tantas comidas como desayunos y cenas juntos. La recaudación total fue de 1116 euros. La recaudación obtenida con las comidas superó a la de las cenas en 156 euros.

   a) ¿Cuántos desayunos, comidas y cenas se sirvieron?

   b) ¿Qué beneficio se obtuvo si las ganancias de un desayuno son 2,5 euros, los de una comida 4 euros y los de una cena 5 euros?

Solución

Primero definiremos las incógnitas a utilizar:

$x \equiv Número\ de\ desayunos,\ y \equiv Número\ de\ comidas,\ z \equiv Números\ de\ cenas$

$x+z=y$ El último día se sirvieron tantas comidas como desayunos y cenas juntos.

$4x+8y+10z=1160$ Se recaudaron 1160 euros en total

$8y-10z=156$ La recaudación obtenida con las comidas superó a la de las cenas en 156 euros.

Ordenando las ecuaciones, quedará el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 4x+8y+10z=1116 \\ 8y-10z=156 \end{cases},\textit{resolveremos el sistema utilizando el método de Gauss}$$

$$-4E_1+E_2\to E_2;\ \begin{cases} x-y+z=0 \\ 12y+6z=1116 \\ 8y-10z=156 \end{cases};\ -2E_2+3E_3\to E_3;\ \begin{cases} x-y+z=0 \\ 12y+6z=1116 \\ -42z=-1764 \end{cases}$$

$Por\ tanto\ z=42; 12y+6\cdot 42=1116; y=72\ ; x-72+42=0; x=30$

Se sirvieron 30 desayunos, 72 comidas y 42 cenas.

Los beneficios obtenidos serán:

$30\cdot 2.5+4\cdot 72+5\cdot 42=573€$

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) $(A-I)^2$

b) $A\cdot B^t$

c) $A-B^{-1}$

Solución

a) $(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$

b) $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$

d) $B^{-1}=\frac{1}{|B|}Adj(B)^t=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A-B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

5. Dos matrices A y B satisfacen las siguientes igualdades:

$$A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A y B

b) Calcula la matriz X tal que *AXA=B*

Solución

a) $A+B+(A-B)=2A=\begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\2 & 0\end{pmatrix}; por\ tanto\ A=\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 0\end{pmatrix}; por\ tanto\ B=\begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$

b) $Si\ AXA=B\ entonces\ X=A^{-1}BA^{-1}$ calcularemos la inversa de A:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)^t=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}BA^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}0 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 0\\4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 8\\1 & -11\end{pmatrix}$$

6. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$

a) Determínese la matriz C^{40}

b) Calcúlese la matriz X que verifica $\mathrm{X}\cdot\mathrm{A}+3\mathrm{B}=\mathrm{C}$

Solución

a) $C^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$C^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=C$

Por tanto, al ser par el exponente de la potencia de la matriz pedida, su valor es la matriz identidad de 2x2.

b) Despejando el valor de X en la expresión $\mathrm{XA}+3\mathrm{B}=\mathrm{C}$, queda:

$$\mathrm{X}=(\mathrm{C}-3\mathrm{B})A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)^t=-1\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\-1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}=(\mathrm{C}-3\mathrm{B})A^{-1}=\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 9\\6 & -3\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}-1 & -2\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -9\\-3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\-1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}13 & 17\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

7. Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & a & a\\a & 0 & a\\a & a & 0\end{pmatrix}$ dependiente del parámetro real a.

a) Determínese los valores de a para los que la matriz A es invertible

b) Para a=1, despéjese y determínese la matriz X de la ecuación matricial $AX=A+2I$, donde I representa la matriz identidad de orden 3.

Solución

a) Sabemos que para que la matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = 2a^3;$ Por tanto, a tiene que ser distinto de cero.

b) Despejando X de la expresión matricial:

$AX = A + 2I\ ;\ A^{-1}AX = A^{-1}A + 2A^{-1}I\ ; X = I + 2A^{-1}$

Por tanto habrá que calcular la inversa de A cuando a=1

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}$

b) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1}?

Solución

a) Como el determinante de un producto es el producto de los determinantes:

$$|A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot |C^t| \cdot |A^{-1}|$$

Además, sabemos que el determinante de una matriz y su traspuesta son iguales. Por tanto:

$$|A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C|^2 \cdot |A^{-1}|$$

Además, sabemos que el determinante de la matriz inversa es el inverso de matriz ($|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$). Por tanto:

$$|A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C|^2 \cdot \frac{1}{|A|} = |C|^2$$

$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ se trata de una matriz triangular y por tanto su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.

Solución: $|A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C|^2 \cdot \frac{1}{|A|} = |C|^2 = 4$

b) $M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$

Como la matriz producto es de 3x2 (no es cuadrada) no existe la matriz inversa.

9. Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para a = 0.

Solución

a) Calcularemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2a$$

El único valor que anula el determinante es *a=2*. Por tanto podemos concluir que:

Si $a \neq 2$ el rango de la matriz de coeficientes, es 3, igual que el rango de la matriz ampliada. Por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible. Al tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas es determinado.

Si $a = 2$, deberemos calcular el rango de la matriz ampliada:

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomemos el menor de orden 3 correspondiente a las tres últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Por tanto, el rango de la matriz de coeficientes es 2 mientras que el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es incompatible.

b) Resuélvase para a = 0.

Como sabemos que el sistema es compatible determinado, conocemos el determinante de la matriz de coeficientes (4-2·0=4) utilizaremos el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{4} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{4} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

10. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$

a) Estúdiese para qué valores del parámetro real *k* la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para k=1, la matriz X tal que X·A=I

Solución

a) Para que la matriz A tenga inversa el determinante debe ser distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{vmatrix} = k^3 + k^2 - 6k$$

Resolvemos la ecuación $k^3 + k^2 - 6k = 0; k(k^2 + k - 6) = 0;$

$Soluciones \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$ Por tanto, A tiene inversa si k es distinto de los anteriores valores.

b) X será la matriz inversa de A. Para calcularla utilizaremos la expresión $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

11. Se considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} (a-1)x + y + z = 1 \\ x + (a-1)y + (a-1)z = 1 \\ x + az = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para a=3.

Solución

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & a-1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

$|A| = a^3 - 2a^2$ Resolvemos la ecuación $a^3 - 2a^2 = 0\,; a^2(a-2) = 0$

Por tanto, si $a \neq 0 \; o \; a \neq 2$ el sistema es compatible pues el rango (3) de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada (teorema de Rouché-Frobenius). Es determinado, pues el número de ecuaciones e incógnitas es el mismo.

Si a=0, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. Tomando el menor compuesto por las columnas primera, segunda y cuarta de la matriz ampliada $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ podemos afirmar que el rango de la matriz ampliada es 3.

Por tanto, el sistema es incompatible pues el rango de la matriz ampliada es distinto del rango de la matriz de coeficientes (teorema de Rouché-Frobenius).

Si a=2, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Como podemos observar en la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, no hay ningún menor de orden 3 cuyo determinante sea cero, pues siempre las dos primeras filas serán iguales. Por tanto, el rango de la matriz ampliada y el rango de la matriz de coeficientes serán iguales a 2 y el sistema será compatible (teorema de Rouché-Frobenius). Al ser el rango menor que el número de incógnitas del sistema, será un sistema compatible indeterminado.

b) Para a = 3 el sistema es compatible determinado, por lo que podremos utilizar el método de Cramer para resolver la ecuación.

De cálculos anteriores sabemos que $|A| = a^3 - 2a^2$; $|A| = 9$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{1}{9} \ ; \ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{2}{9}$$