Ejercicios resueltos

1. Se considera la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16$:

   a. Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x=1
   b. Calcúlese el área de la región limitada por la gráfica de f(x), el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 3$

Solución.

a. La ordenada de la función en x= 1 es $f(1) = 4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 16 = 8$. La recta debe pasar por el punto (1,8).
La pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada de la función cuando x=1. Por tanto:

$$f'(x) = 12x^2 - 24x\ ;\ f'(1) = 12 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 = -12$$

La recta tiene la forma $y = -12x + n$. Como sabemos que la recta pasa por el punto (1,8):

$$8 = -12 \cdot 1 + n\ ; n = 20$$

Por tanto, la recta es $y = -12x + 20$

b. Para calcular el área, primero calcularemos los puntos de corte de la función para detectar si hay alguna región por debajo del eje OX.

$$4x^3 - 12x^2 + 16 = 0$$

Para x=-1 se anula el polinomio, por tanto, podemos poner:

$$4x^3 - 12x^2 + 16 = (x + 1)(4x^2 - 16x + 16\ ) = 0$$

Para calcular el resto de soluciones resolvemos la ecuación de segundo grado: $4x^2 - 16x + 16 = 0\ ; x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{8} = 2$

La función puede expresarse como: $f(x) = 4(x + 1)(x - 2)^2$, por tanto, es negativa cuando $x + 1 < 0; x < -1$.

Podemos calcular el área:

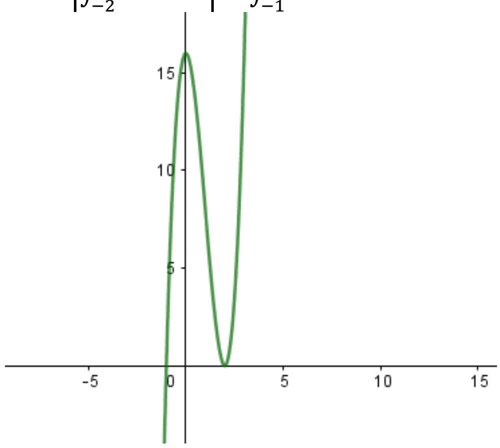
$$A = \left| \int_{-2}^{-1} f(x)dx \right| + \int_{-1}^{3} f(x)dx$$

Calculamos una primitiva de f(x):

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int 4x^3 - 12x^2 + 16\, dx = x^4 - 4x^3 + 16x + k\ ;\ \forall k \in \mathbb{R}$$

Finalmente, calculamos el área:

$$A = \left| \int_{-2}^{-1} f(x)dx \right| + \int_{-1}^{3} f(x)dx = |-27| + 21 - (-11) = 59\ unidades\ de\ superficie$$



2. Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{3x^2+3}{x}$

   a. Calcúlese el dominio y las asíntotas de f(x)
   b. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

Solución.

a. El dominio de la función comprende todos los números reales salvo el cero.
   Asíntotas verticales:
   Las buscaremos en x=0:
   $\lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2+3}{x} = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2+3}{x} = +\infty$ Por tanto, tiene una asíntota en x = 0
   Asíntotas horizontales:
   $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3}{x} = \infty$. No tiene asíntotas horizontales

   Asíntotas oblicuas $(y = mx + n)$

$$m = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+3}{x} : x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+3}{x^2}\right) = 3$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+3}{x} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+3-3x^2}{x}\right) = 0$$

   Por tanto, tiene una asíntota oblicua $y = 3x$

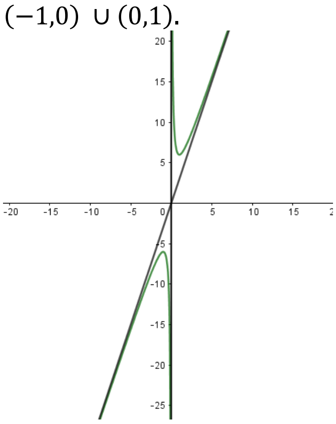
b. Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calcularemos la función derivada, los puntos críticos y tomaremos en cuenta el valor donde no está definida la función:

$$f'(x) = \frac{6x \cdot x - 1 \cdot (3x^2+3)}{x^2} = \frac{3x^2-3}{x^2}$$

$$\frac{3x^2-3}{x^2} = 0\ ;\ 3x^2 - 3 = 0\ ;\ \ x = 1\ o\ x = -1$$

signo	x<-1	-1<x<0	0<x<1	x>1
x-1	-	-	-	+
x+1	-	+	+	+
Derivada	+	-	-	+

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1,0) \cup (0,1)$.



3. El beneficio diario (en miles de euro) de una empresa productora de cemento viene dado por la función:

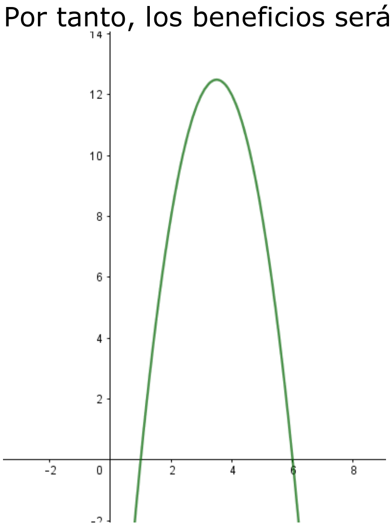
   $f(x) = -2x^2 + 14x - 12$

   Donde x representa las toneladas de cemento producidos al día. Se sabe que la producción diaria de cemento está entre 0 y 8 toneladas, es decir, $x \in [0,8]$

   a. Calcúlense f(0) y f(8) e interprétense los resultados en el contexto del problema. Hállense las toneladas de cemento que deben producirse diariamente para obtener el máximo beneficio posible.
   b. Determínese entre qué valores debe estar la producción diaria de cemento para que la empresa no tenga pérdidas.

Solución.

a. $f(0) = -2 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 - 12 = -12$
   $f(8) = -2 \cdot 8^2 + 14 \cdot 8 - 12 = -28$
   Esta función es una parábola con las ramas hacia abajo, pues es una función polinómica de grado 2 con coeficiente principal negativo, por lo que únicamente tendrá como punto crítico el valor se su vértice que será el máximo:
   $f'(x) = -4x + 14;\ -4x + 14 = 0\ ; x = \frac{7}{2};\ f\left(\frac{7}{2}\right) = -2\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 14 \cdot \frac{7}{2} - 12 = \frac{25}{2} = 12.5$
   Por tanto, el máximo beneficio es 12500 € si se producen 3,5 toneladas.
b. La empresa no tendrá pérdidas donde la función es positiva, por tanto, calcularemos los puntos de corte con el eje OX.
   $f(x) = -2x^2 + 14x - 12 = 0;\ \textit{las soluciones de esta ecuación son } x = 1 \textit{ y } x = 6$.
   Por tanto, los beneficios serán positivos en el intervalo (1,6).



4. Determínese el valor de la derivada de la función $f(x) = \frac{e^x}{1-x^2}$ en el punto de abscisa x=0.

Solución.

$$f'(x) = \frac{e^x(1-x^2) + 2xe^x}{(1-x^2)^2}\ ;\ f'(0) = \frac{e^0(1-0^2) + 2 \cdot 0e^0}{(1-0^2)^2} = 1$$

5. Estúdiense las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

Solución.

El denominador de esta función se anula para x=1 y x=-1. Estudiaremos las asíntotas verticales para estos valores:

$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty$ $\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$ Por tanto, tiene una asíntota vertical x=-1

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty$ $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$ Por tanto, tiene una asíntota vertical x=1

No tiene asíntotas horizontales pues el polinomio del numerador tiene mayor grado que el polinomio del denominador:

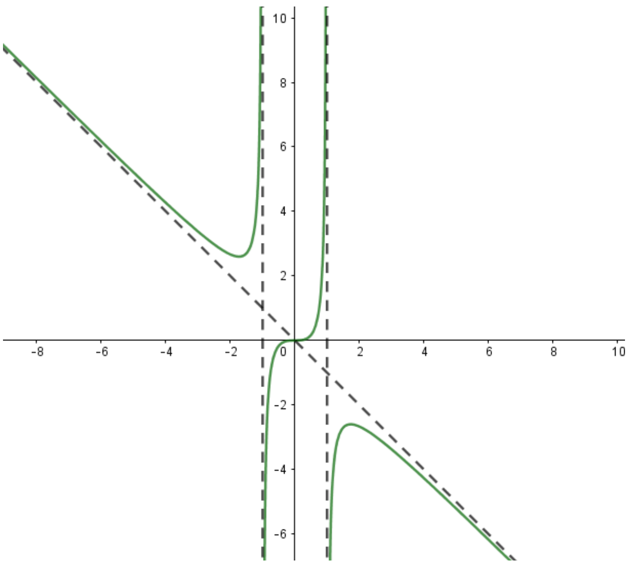
$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty$

Asíntotas oblicuas $(y = mx + n)$

$$m = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} : x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x - x^3} \right) = -1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} - (-x) \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{1-x^2} \right) = 0$$

Por tanto, tiene una asíntota oblicua $y = -x$



6. Se considera la función real de variable real: $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$

   a. Estúdiese la continuidad de *f(x)* en $\mathbb{R}$
   b. Calcúlese $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Solución.

a. El primer tramo de función es continuo, pues es el cociente de dos funciones continuas, salvo para el caso en que se anule el denominador, es continua. Por tanto, para x=-2 la función no es continua.

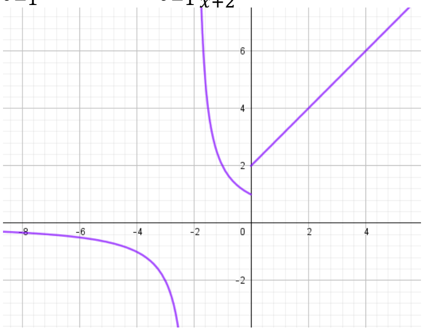
Para x=0 habrán de estudiarse los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x+2} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+2 = 2$$

Al no ser iguales los límites laterales en x=0 la función es discontinua para x=0.

Por último, el segundo tramo de la función es una recta, que siempre es una función continua.

b. $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{2}{x+2}dx = Ln(x+2)]_{-1}^{0} = 2Ln(0+2) - 2Ln(-1+2) = 2Ln(2)$



7. Considérese la función real de variable real $f(x) = x^3 - 3x$:

a. Calcúlense $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{1-x^3}$ y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$

b. Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

Solución.

a. $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{1-x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-3x}{1-x^3} = -1$ Se trata de un cociente de polinomios de igual grado, el límite coincide con el cociente de los coeficientes principales de los mismos.

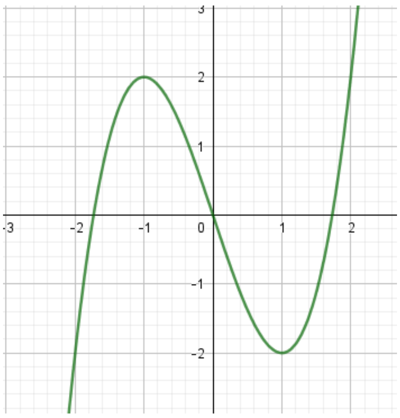
$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2-3)x}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2-3) = -3$ Se trata de una indeterminación del tipo 0/0. Por tanto, factorizamos ambos polinomios, simplificamos y evaluamos.

b. Calculamos los puntos críticos utilizando la derivada y posteriormente el signo de la misma.

$f'(x) = 3x^2 - 3\,;\;\; 3x^2 - 3 = 0;\;\; x^2 = 1; x = 1 \; o \; x = -1$

signo	x<-1	-1<x<1	x>1
x-1	-	-	+
x+1	-	+	+
Derivada	+	-	+

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1,1)$.



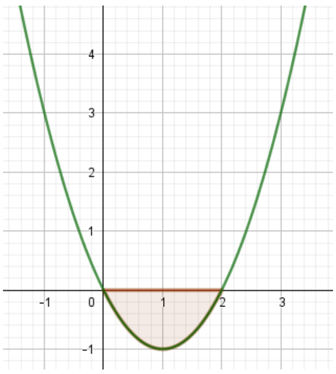
8. Se considera la función real de variable real $f(x) = x^2 + ax$.

   a. Calcúlese el valor del parámetro a para que la función f(x) tenga un extremo relativo en x=2. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.
   b. Para a=-2, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de f(x), el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=2.

Solución.

a. Esta función es una parábola con las ramas hacia arriba, pues es una función polinómica de grado 2 con coeficiente principal positivo, su vértice será el mínimo local. Lo comprobaremos calculando la derivada de la función, calculando el punto crítico y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:
$$f'(x) = 2\mathrm{x} + \mathrm{a}\,;\, f'(2) = 0;\ 2 \cdot 2\ + \mathrm{a} = 0\,;\, a = -4$$
La función resultante es $f(x) = x^2 - 4x$
Cuando $x < 2$, $f'(x) < 0$ por tanto la función es decreciente
Cuando $x > 2$, $f'(x) > 0$ por tanto la función es creciente
Podemos concluir que en x = 2 hay un mínimo relativo.

b. La función resultante es $f(x) = x^2 - 2x$, como la función es continua comprobaremos cuales son sus puntos de corte con el eje OX:
$f(x) = 0;\ x^2 - 2x = 0\,;\, x(x-2) = 0$ Por tanto, sus puntos de corte con el eje OX son (0,0) y (2,0).
El recinto cuya área hay que calcular queda todo él por debajo del eje OX, por lo que la integral que nos proporciona el área será toda 8negativa. Por tanto:
$$Área = \left|\int_0^2 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^2 x^2 - 2x\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2\right| = \left|\frac{8}{3} - 4\right| = \frac{4}{3}$$



9. Se considera la función real de variable real $f(x)=\frac{x^2-1}{3x-2}$

   a. Estúdiense sus asíntotas
   b. Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

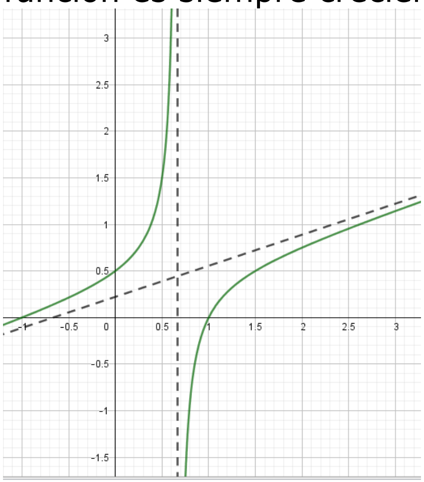
Solución.

a. El dominio de la función está compuesto de todos los números reales salvo el valor $\frac{2}{3}$ que anula el denominador. Calculemos el límite de la función en $x=\frac{2}{3}$:
$\lim_{x\to\frac{2}{3}^-}\frac{x^2-1}{3x-2}=-\infty$ $\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\frac{x^2-1}{3x-2}=+\infty$ Por tanto, existe una asíntota vertical $x=\frac{2}{3}$
No hay asíntotas horizontales $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x-2}=\infty$
Asíntotas oblicuas $(y=mx+n)$

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{3x-2}:x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{3x^2-2x}\right)=\frac{1}{3}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{3x-2}-\frac{1}{3}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-3-3x^2+2x}{9x-6}\right)=\frac{2}{9}$$
Por tanto, tiene una asíntota oblicua $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}$

b. Calculemos la derivada de la función:
$f'(x)=\frac{2x(3x-2)-3(x^2-1)}{(3x-2)^2}=\frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}$
Calculamos los puntos críticos:
$f'(x)=0\,;\ 3x^2-4x+3=0$
Esta ecuación no tiene soluciones por lo que la función no tiene puntos críticos. Además, la expresión $3x^2-4x+3$ o siempre es positiva o siempre es negativa. Como el término independiente es mayor que cero, esta expresión siempre es mayor que cero. Al ser la derivada siempre positiva, la función es siempre creciente.



10. Se considera la función real de variable real $f(x) = x^3 + 8$

   a. Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica f(x), el eje de abscisas y por las rectas x=-3 y x=-1.
   b. Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto de abscisa x=1.

Solución.

a. La función es continua para cualquier valor real, pues se trata de un polinomio. El único punto de corte con el eje OX es -2. Por tanto, hay una parte de la región que quedará por debajo del eje OX y otra parte por encima de aquel. Para saberlo calcularemos el valor de la función en x=0 (f(0)=8). Por tanto, la función queda por debajo del eje OX en el intervalo $(-\infty, -2)$ y por encima en $(-2, +\infty)$.
Teniendo en cuenta lo anterior podemos expresar el área pedida como:
$$Area = \left|\int_{-3}^{-2} f(x)dx\right| + \int_{-2}^{-1} f(x)dx$$
Calculamos una primitiva de *f(x)*:
$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{dx} = \int x^3 + 8\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 8x + k \;\forall k \in \mathbb{R}$$
Por tanto:
$$Area = |F(-2) - F(-3)| + F(-1) - F(-2) =$$
$$= \left|4 - 16 - \left(\frac{81}{4} - 24\right)\right| + \frac{1}{4} - 8 - 4 + 16 = \frac{25}{2}\; unidades\ de\ superficie$$

b. $f(1) = 1^3 + 8 = 9$ Por tanto, la recta debe pasar por el punto (1,9)
Calculamos la pendiente de la recta:
$$f'(x) = 3x^2;\; f'(1) = 3$$
Por tanto la recta tiene la forma
$y = 3x + n$
Como debe contener el punto (1,9) : $9 = 3 \cdot 1 + n\,; n = 6$
Por tanto, la recta es: $y = 3x + 6$