Ejercicios resueltos

1. En una clase de matemáticas de 50 alumnos se hacen tres grupos de trabajo A, B y C, para preparar una serie de preguntas. En el grupo A hay 10 alumnos, en el B 20 alumnos y en el C 20 alumnos.

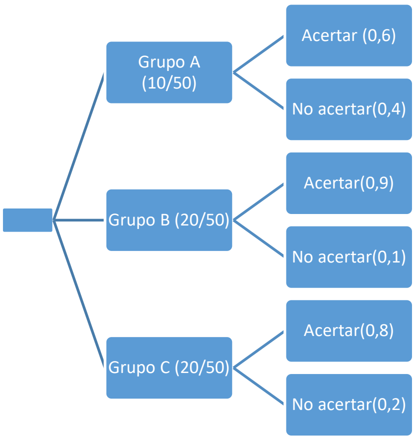
   La probabilidad de que un alumno del grupo A acierte una determinada pregunta es 0,6; un alumno del grupo B la acierta con una probabilidad de 0,9 y un alumno del grupo C la acierta con una probabilidad de 0,8. Elegido al azar un alumno de esa clase calcula:

   a) La probabilidad de que acierte esa pregunta

   b) Si ha acertado la pregunta, la probabilidad de que sea del grupo B.

Solución.

1. Aplicaremos el teorema de la probabilidad total, pues la pertenencia a los grupos es mutuamente excluyente (los sucesos son incompatibles) y no hay ningún alumno de la clase de matemáticas que no pertenezca a uno de los grupos.



Sea R el suceso acertar y sean los sucesos A, B y C pertenecer al grupo correspondiente. Aplicando el teorema de probabilidad total:

$$P(R) = P(A)P(R/A) + P(B)P(R/B) + P(C)P(R/C) = \frac{10}{50} \cdot 0.6 + \frac{20}{50} \cdot 0.9 + \frac{20}{50} \cdot 0.8 = \frac{4}{5}$$

2. Aplicaremos el teorema de Bayes, que queda expresado de la siguiente forma de acuerdo con la notación:

$$P(B/R) = \frac{P(R/B) \cdot P(B)}{P(R)} = \frac{\frac{20}{50} \cdot 0.9}{{}^{4}/_{5}} = \frac{9}{20}$$

2. El ganado ovino de una región es sometido a un control sanitario para comprobar que está libre de cierta enfermedad infecciosa. En el proceso de control cada animal es sometido a las pruebas P_1, P_2 y P_3 en ese orden.

   Por experiencia, se sabe que en el 95% de los casos P_1 da resultado negativo, que 10 de cada 100 ovejas sometidas a P_2 dan resultado positivo y que P_3 da resultado positivo con una probabilidad de 0,03.

   Sabiendo que si una prueba da resultado positivo el animal es sacrificado, determina la probabilidad de que una oveja sometida a dicho proceso de control no sea sacrificada.

   Solución.

   Todos los sucesos son independientes, una prueba no influye en la otra para ser positiva o no.

   Por tanto, sean los sucesos:

$$A \equiv No\ ser\ sacrificado;\ P_i \equiv Dar\ negativo\ en\ la\ prueba\ número\ i$$

$$P(A) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = P(P_1) \cdot P(P_2) \cdot P(P_3) = 0.95 \cdot 0.9 \cdot 0.97 = 0{,}82935$$

3. Lucía guarda en el cajón su ropa para clases de danza: dos maillots negros, uno rojo, uno rosa y dos azules; dos pares de medias blancas, dos de medias negras y tres de color rosa.

   Si al ir a clase coge un maillot y un par de medias, calcula:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que vaya a clase vestida de negro?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que vaya vestida de negro y rosa?

   Solución.

   a. La selección del maillot y de las medias es independiente. La única forma de ir de negro es seleccionar un maillot negro y unas medias negras.

      Sean los sucesos

$$A \equiv Elegir\ un\ maillot\ negro; B \equiv Seleccionar\ unas\ medias\ negras$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{42} = 0.095$$

   b. Para que vaya de rosa y negro puede hacerlo llevando un maillot negro y unas medias rosas o un mallot rosa y unas medias negras. Ambos sucesos son incompatibles.
      Sean los sucesos:

$$A_n \equiv Elegir\ un\ maillot\ negro; B_n \equiv Seleccionar\ unas\ medias\ negras$$
$$A_r \equiv Elegir\ un\ maillot\ rosa\ ; B_r \equiv Seleccionar\ unas\ medias\ rosas$$

      La probabilidad pedida es:

$$P\big((A_n \cap B_r) \cup (A_r \cap B_n)\big) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{42} = 0{,}19$$

4. En una urna hay seis bolas blancas y tres bolas negras. Si se extraen sucesivamente tres bolas sin reemplazamiento, calcula la probabilidad de que alguna bola sea negra.

Solución

La probabilidad de que alguna bola sea negra es igual a 1 menos su complementario, que no haya ninguna bola negra.

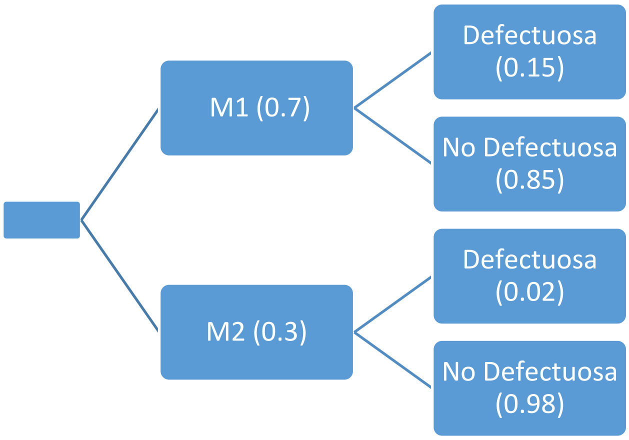
Sea el suceso $A \equiv alguna\ bola\ sea\ negra$

Entonces: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = 1 - 0.24 = 0.76$

5. Una determinada pieza puede ser fabricada por dos máquinas M_1 y M_2, que funcionan independientemente. La máquina M_1 fabrica el 70% de las piezas y la máquina M_2 el 30%. El 15% de las piezas fabricadas por M_1 y el 2% de las fabricadas por M_2 son defectuosas. Calcula la probabilidad de que una pieza sea defectuosa.

Solución

Aplicaremos el teorema de la probabilidad total pues una pieza únicamente puede ser fabricada en una máquina (son mutuamente excluyentes) y la totalidad de las piezas se fabrica en ellas (su unión es todo el espacio muestral).



Sean los sucesos:

$M_i \equiv La\ pieza\ ha\ sido\ fabricada\ por\ la\ máquina\ i\ D \equiv La\ pieza\ es\ defectuosa$

$$P(D) = P(M_1)P(D/M_1) + P(M_2)P(D/M_2) = 0.7 \cdot 0.15 + 0.3 \cdot 0.02 = 0.111$$

6. Se sabe que para un alumno cualquiera de un instituto, la probabilidad de que éste practique algún deporte es 0,5; de que acuda al cine con asiduidad es 0,6 y la de que practique deporte o vaya al cine 0,9. Elegido al azar un alumno de este centro, calcula:

   a) La probabilidad de que vaya al cine y practique algún deporte.

   b) La probabilidad de que no practique deporte ni vaya al cine.

Solución

Vamos a definir dos sucesos y calcular las probabilidades que nos ofrece el enunciado:

$C \equiv El\ alumno\ seleccionado\ va\ al\ cine;$

$D \equiv El\ alumno\ seleccionado\ practica\ deporte$

$$P(D) = 0.5; P(C) = 0.6; P(C \cup D) = 0.9$$

a) La probabilidad pedida es:
$$P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 0.6 + 0.5 - 0.9 = 0.2$$
b) La probabilidad pedida es:
$$P(\bar{C} \cap \bar{D}) = P(\overline{C \cup D}) = 1 - P(C \cup D) = 1 - 0.9 = 0.1$$

7. En una clase de bachillerato compuesta por el 55% de chicos y el resto de chicas, practican el balonmano el 40% de los chicos y una de cada cuatro chicas.

   Si elegimos al azar un alumno de la clase, calcula:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano y sea chica?

   c) Si resulta que no practica balonmano, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Solución

Para resolver este problema dispondremos la información en una tabla:

	CHICOS	CHICAS	
PRACTICAN B.	22% (0.4X55)	11,25%	33,25%
NO PRACTICAN B.	33%	33,75%	66,75%
	55%	45%	100%

a) $P(practique\ balonmano) = 0.3325$

b) $P(practique\ balonmano\ y\ sea\ chica) = 0.1125$

c) $P(sea\ chica/no\ practique\ balonmano) = \frac{0.3375}{1-0.3325} = 0.51$

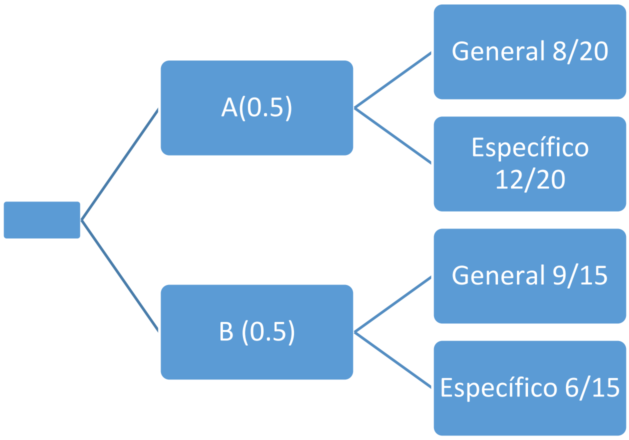
8. Para superar una oposición se presentan dos modelos de examen A y B. En el modelo A hay 8 preguntas de contenido general y 12 de contenido específico, y el modelo B se compone de 9 preguntas de contenido general y 6 de contenido específico. No hay preguntas comunes en los dos modelos de examen. Para elegir una pregunta, primero se elige un modelo de examen al azar y luego, al azar, se elige una pregunta del modelo elegido.

   a) ¿cuál es la probabilidad de que la pregunta sea de contenido específico?

   b) Si la pregunta que se ha elegido es de contenido general, ¿cuál es la probabilidad de que se haya elegido previamente el modelo A?

Solución

Aplicaremos el teorema de la probabilidad total pues un examen únicamente puede ser únicamente de dos tipos (son mutuamente excluyentes) y la totalidad de las preguntas se encuentran en aquellos (su unión es todo el espacio muestral).



Definiremos los siguientes sucesos:

$A \equiv Elegir\ un\ examen\ de\ tipo\ A; B \equiv Seleccionar\ un\ examen\ de\ tipo\ B$

$G \equiv Elegir\ una\ pregunta\ general; E \equiv Seleccionar\ una\ pregunta\ específica$

a) $P(E) = P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) = 0.5 \cdot \frac{12}{20} + 0.5 \cdot \frac{6}{15} = 0.30 + 0{,}20 = 0.50$

b) En este caso utilizaremos el teorema de Bayes:

$$P(A/G) = \frac{P(G/A) \cdot P(A)}{P(G)} = \frac{P(G/A) \cdot P(A)}{1 - P(E)} = \frac{0.5 \cdot \frac{8}{20}}{1 - 0.50} = \frac{0.2}{0.50} = 0.4$$

9. Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diésel. Sabemos que el 60% de los modelos son de tipo A y el 30% de tipo B. El 30% de los coches fabricados tienen motor diésel, el 30% de los coches del modelo A son de tipo diésel y el 20% de los coches del modelo B tienen motor diésel. Se elige un coche al azar y se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

Solución

a) El coche es del modelo C

b) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diésel

c) El coche tiene motor diésel, sabiendo que es del modelo C

Antes de resolver el problema deberemos calcular la probabilidad que corresponde a la fabricación de coches diésel fabricados de cada modelo.

Como el 30% de los coches son diésel y sabiendo que el 30% de los coches fabricados de tipo A son diésel y de tipo B son el 20%:

Probabilidad de diésel tipo A = 0.3·0.3 = 0.09

Probabilidad de diésel tipo B = 0.3·0.2 = 0.06

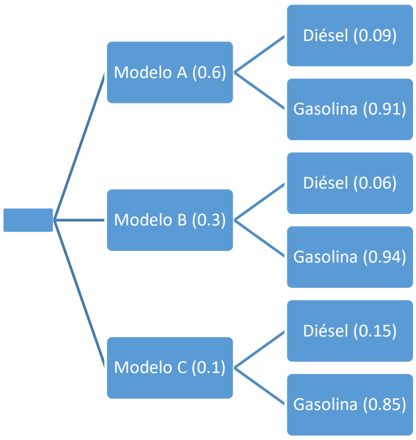
Probabilidad de diésel tipo C = 0.3·(1 - 0.3 - 0.2)= 0.3 · 0.5 = 0.15

Definimos también los siguientes sucesos:

$A \equiv El\ coche\ elegido\ es\ del\ modelo\ A; B \equiv El\ coche\ elegido\ es\ del\ modelo\ B;$

$C \equiv El\ coche\ elegido\ es\ del\ modelo\ C; D \equiv El\ coche\ elegido\ es\ diésel;$

$G \equiv El\ coche\ elegido\ es\ de\ gasolina;$



a) $P(C) = 0.1$. Este resultado se obtiene debido a que la suma de la probabilidad de todos los modelos debe ser 1.
b) $P(A/D)$. Para calcular esta probabilidad utilizaremos el teorema de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.6 \cdot 0.09}{0.3} = 0.18$$

En este caso no utilizamos el teorema de probabilidad total, pues uno de los datos que nos proporciona el problema es P(D). Tampoco es necesario desarrollar todo el árbol esquema que hemos realizado antes.

c) $P(D/C) = 0.15$. Este resultado se obtiene directamente del esquema anterior.

10. Sabiendo que el 40% de los residentes de cierta localidad son consumidores de pescado y que, con probabilidad 0,25, un consumidor de pescado no es consumidor de carne, ¿cuál sería la probabilidad de que, seleccionado al azar, un residente de esa localidad resulte ser consumidor de carne y de pescado?

Solución

Definimos los siguientes sucesos:

$C \equiv ser\ consumidores\ de\ carne; S \equiv Consumidores\ de\ pescado;$

Atendiendo al enunciado, podemos poner:

$$P(S) = 0.4\,; P(\bar{C}/S) = 0.25$$

Debemos calcular $P(S \cap C)$:

$$P(S) = P\big((C \cap S) \cup (\bar{C} \cap S)\big) = P(C \cap S) + P(\bar{C} \cap S)$$

Por tanto:

$$0.4 = P(C \cap S) + \ P(\bar{C}/S) \cdot P(S) = P(C \cap S) + 0.25 \cdot 0.4$$

$$P(C \cap S) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3$$

11. Entre los estudiantes matriculados de cierta asignatura el número de chicas duplica al de chicos. Al final de curso han aprobado el 80% de las chicas y el 60% de los chicos. Calcula:

a) El porcentaje de las chicas dentro del total de estudiantes matriculados

b) El porcentaje de aprobados dentro del total de estudiantes matriculados.

c) El porcentaje de las chicas dentro del total de estudiantes que no han aprobado.

Solución

Para resolver el problema dispondremos la información en una tabla. Como se puede observar en la misma:

a) 66.66%
b) 73,326%
c) 13.332%

	Chicos	Chicas	
Aprobados	$0.6 \cdot 33.33 = 19{,}998$	$0.8 \cdot 66.66 = 53{,}328$	73,326
Suspensos	$0.4 \cdot 33.33 = 13{,}332$	$0.2 \cdot 66.66 = 13{,}332$	26,664
	$\frac{1}{3}100 = 33.33$	$\frac{2}{3}100 = 66.66$	100