Instrucciones:

Si tienes pendientes la primera y segunda evaluación debes elegir dos ejercicios de entre los cuatro primeros y dos de entre el quinto y octavo.

SI tienes pendiente la primera evaluación únicamente, debes hacer los cuatro primeros ejercicios.

Si tienes pendiente la segunda evaluación únicamente, debes hacer los cuatro últimos ejercicios (5, 6, 7 y 8).

Si quieres subir nota de la primera evaluación debes haces los cuatro primeros ejercicios.

SI quieres subir nota de la segunda evaluación debes hacer los cuatro últimos ejercicios.

Al principio de la hoja de examen debes indicar tu situación y los ejercicios que eliges.

1. Se consideran los sucesos, A y B, de un experimento aleatorio tales que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$
   a. ¿Son A y B sucesos independientes? ¿Son sucesos incompatibles? Justifica la respuesta
   b. Calcula $P(\bar{A}/\bar{B})$

   Solución

   A y B son independientes si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

   $$P(A \cap B) = 0{,}5\ ;\ P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

   $$\textit{como ambas cantidades son distintas no son independientes}$$

   A y B son incompatibles si la intersección de los sucesos es el conjunto vació (por tanto la probabilidad de la intersección es cero). Cómo la probabilidad de la intersección es ½ los sucesos no son incompatibles.

   $$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - {}^{1}/_{3}} = \frac{1 - P(A \cup B)}{{}^{2}/_{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)}{2/3} = \frac{1}{8}$$

2. Para una población en la que se observa una variable aleatoria X con distribución normal, de media desconocida y desviación típica igual a 1,5, se tomó una muestra aleatoria simple para estimar la media poblacional y se obtuvo un intervalo de confianza cuyos extremos son 11,0703 y 12,9297.
   a. Determine el valor de la media muestral.
   b. Si el tamaño de la muestra fue 10, ¿cuál es el nivel de confianza del intervalo obtenido?

   Solución
   a. $\bar{X} = \frac{11{,}0703 + 12{,}9297}{2} = 12$

b. $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12{,}9297 - 12\ ;\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96\ por\ tanto\ nivel\ de\ confianza\ del\ 95\%$

3. Se tienen 7 sobres cerrados. Uno de ellos contiene un premio y el resto son sobres vacíos. Se lanza un dado y luego se descartan tantos sobres vacíos como el dado indique. Posteriormente, se escoge al azar uno de los sobres que restan.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de escoger el sobre premiado?
   b. Si salió el premio, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del dado haya sido el 1?

Solución

a) Sea A el suceso de escoger el sobre premiado y D_i el resultado del dado es i. Entonces,

$$P(A) = P(A|D_1)P(D_1)+P(A|D_2)P(D_2)+P(A|D_3)P(D_3)+P(A|D_4)P(D_4)+P(A|D_5)P(D_5)+P(A|D_6)P(D_6).$$

Por otro lado, $P(D_i) = 1/6$ y $P(A|D_i) = 1/(7-i)$, para $1 \leq i \leq 6$. Sustituyendo se obtiene

$$P(A) = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\cdot 2{,}45 \approx 0{,}4083.$$

b)

$$P(D_1|A) = \frac{P(A|D_1)P(D_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\cdot 2{,}45} = \frac{1}{6\cdot 2{,}45} \approx 0{,}0680.$$

4. Para estimar la proporción de estudiantes de una determinada facultad que utilizan la cafetería se toma una muestra de estudiantes al azar.
   a. Sabiendo que la proporción poblacional es P = 0,55, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de estudiantes para garantizar que, con una confianza del 98,02 %, el margen de error en la estimación no supera el 10 %.
   b. Si la muestra aleatoria fue de 100 estudiantes, de los cuales 70 utilizaban la cafetería, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería.

Solución

a) $\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; z_{\alpha/2} = 2{,}33$

$n = \dfrac{2{,}33^2 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}45}{0{,}1^2} = 134{,}3653$. El mínimo tamaño muestral es 135.

b) $\widehat{p} = 0{,}7, n = 100, z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$0{,}7 \pm 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}7\cdot 0{,}3}{100}}$

$IC = (0{,}6102; 0{,}7898)$

5. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Calculad el valor de ***m*** para que $A \cdot B = C^t$
b. Para ***m=0*** calculad B^{-1}

Solución

a.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{m}-\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2}\boldsymbol{m}-\mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m}+\mathbf{2} \\ \boldsymbol{m}-\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Igualando las dos matrices:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2}\boldsymbol{m}-\mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m}+\mathbf{2} \\ \boldsymbol{m}-\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$\mathbf{2}\boldsymbol{m}-\mathbf{1}=\mathbf{3}\,;\boldsymbol{m}+\mathbf{2}=\mathbf{4}\,;\boldsymbol{m}-\mathbf{1}=\mathbf{1}$ **es decir** $m=2$

b.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\ ;\ \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ay + z = 6 \\ 2x - y + z = a-1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

a. Discuta el sistema para los distintos valores de $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$.
b. Resuelva el sistema de ecuaciones para ***a* = *2***.

Solución

a.

Calculemos el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3a-1;\ -3a-1=0\,;a=-\frac{1}{3}$$

Por tanto, podemos decir que:

Caso 1: $\boldsymbol{a} \neq -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

El determinante de A es distinto de cero, por tanto, el rango de A es tres al igual que el de la matriz ampliada. Por el teorema de Rôche-

Fröbenius el sistema es compatible. Es determinado, pues el rango de la matriz coincide con el número de ecuaciones y de incógnitas.

Caso 1: $\boldsymbol{a = -\frac{1}{3}}$

El determinante de A es cero, como hay un menor de orden 2 distinto de cero, el rango es 2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Calculemos el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -4/3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 6 & -3 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2F_1 - F_2 \rightarrow F_2 \; y \; F_1 + F_3 \rightarrow F_3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} 2F_2 - F_3 \rightarrow F_3 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 3.

Como el rango de la matriz de coeficientes no coincide con el rango de la matriz ampliada, por el teorema de Rôche-Fröbenius el sistema es incompatible.

b.

Para $a = 2$; $|A| = -7$. Resolveremos el sistema por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1$$

7. Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 km entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la

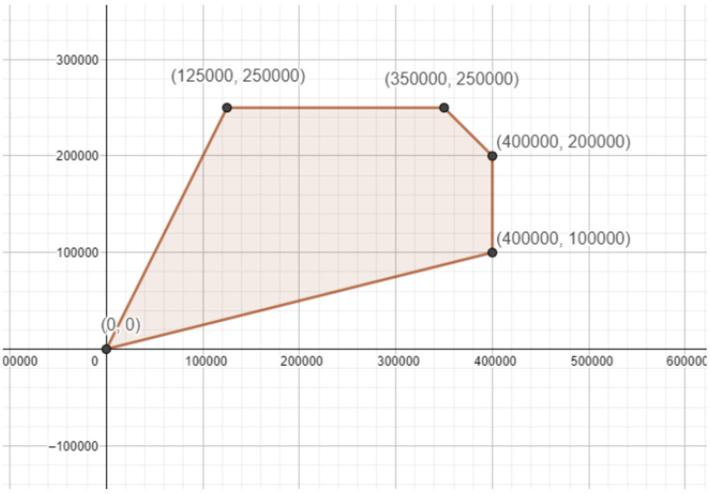
grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.

Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

Solución

Sea x la variable que representa los km. recorridos por la furgoneta grande. Sea y la variable que representa los km. recorridos por la furgoneta pequeña. La región factible S viene definida por las restricciones:

$x \leq 400000$, $y \leq 250000$, $x + y \leq 600000$, $x \leq 4y$, $y \leq 2x$



S está determinada por los vértices A = (0, 0), B = (125000, 250000), C = (350000, 250000), D =(400000, 200000) y E = (400000, 100000).

La región S es cerrada y acotada, para calcular el valor máximo de la función objetivo f (x, y) =10x + 5y se evalúa la función en los vértices de S:

$f(0, 0) = 0$

$f(125000, 250000) = 10 \cdot 125000 + 5 \cdot 250000 = 2500000$

$f(350000, 250000) = 10 \cdot 350000 + 5 \cdot 250000 = 4750000$

$f(400000, 200000) = 10 \cdot 400000 + 5 \cdot 200000 = 5000000$

$f(400000, 100000) = 10 \cdot 400000 + 5 \cdot 100000 = 4500000$

El punto de la región en el cual se alcanza el máximo es D, siendo 5000000 el valor máximo alcanzado.

Esto es, para obtener el máximo beneficio, la furgoneta grande deberá recorrer 400000 km y la mediana 200000 km, siendo 50000 € el máximo beneficio que se obtiene.

8. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Determine los valores de ***a*** para los cuales la matriz A es invertible.
b. Calculad A^{-1} para ***a=1***.

Solución

a. $|A| = (a+1)^2, es\ decir, es\ invertible\ cuando\ a\ es\ distinto\ de -1$
b. Para a=1 $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$