INTEGRALES

ALGUNAS TÉCNICAS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN Y APLICACIONES

Definición

Dadas dos funciones reales *f* y *F* definidas en un mismo dominio. La función *F* es una función primitiva de *f*, si *F* tiene por derivada a *f*. Es decir:

$$F \text{ es primitiva de } f \iff F' = f$$

Si el dominio de una función es un intervalo, entonces el conjunto de las primitivas de f es de la forma:

$$F(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

Al conjunto de las primitivas de una función *f* se llama *integral indefinida* y al número real *C* se le denomina *constante de integración*

Notación

La notación:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Donde C es un número real arbitrario, indica que F es una primitiva de f, es decir, que $F'(x) = f(x)$ en todo el **dominio de la función**.

Ejemplos

$$\int \mathbf{2\,dx = 2x + C}$$ $$Pues\ (2x + C)' = 2$$

$$\int \mathbf{3x^2\,dx = x^3 + C}$$ $$Pues\ (x^3 + C)' = 3x^2$$

$$\int \mathbf{4t\,dt = 2t^2 + C}$$ $$Pues\ (2t^2 + C)' = 4t$$

$$\int \mathbf{9t^2\,dt = 3t^3 + C}$$ $$Pues\ (3t^3 + C)' = 9t^2$$

Relación entre derivada e integral

La relación inversa entre derivada e integral puede representarse de forma simbólica de las siguientes formas:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$$

La derivada es la inversa de la integración

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

La integral es la inversa de la derivada

Reglas básicas de integración

$$\int k\,dx = kx + C, donde\ k\ es\ una\ constante$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

Ejemplos I

$$\int 5x\,dx = 5\int x\,dx = 5\frac{x^2}{2} + C = \frac{5}{2}x^2 + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\int (x+4)\,dx = \int x\,dx + \int 4\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + C$$

$$\int (4x^3 - 5x + 2)dx = \int 4x^3\,dx - \int 5x\,dx + \int 2\,dx = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C$$

Ejemplos II

En algunas ocasiones, reescribir las funciones a integrar puede permitirnos solucionar la integral con más facilidad:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int x^{1-\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2}} x^{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

Soluciones particulares

Si entendemos el cálculo de una integral indefinida como una ecuación de la forma

$$\boldsymbol{y = \int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

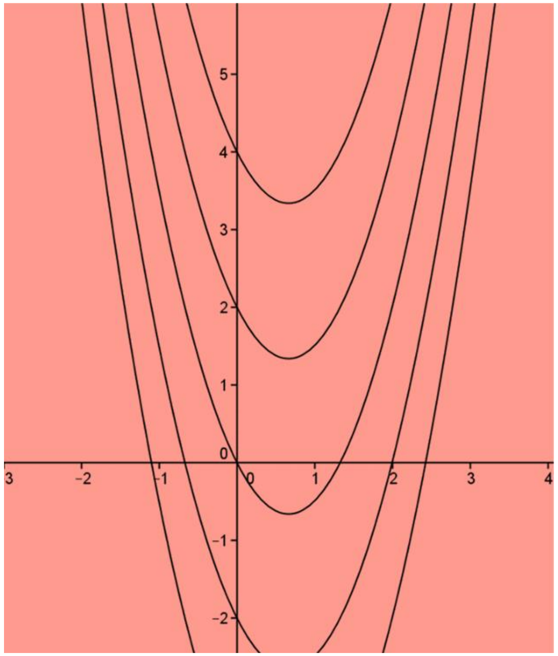
No tiene una única solución, pues es un conjunto de funciones desplazadas respecto al eje de ordenadas, por el parámetro C de la solución.

Es posible obtener una única solución si tenemos un valor inicial (condición inicial), es decir si conocemos el valor de *F* en algún punto.

Ejemplo

Encontrar la solución general de $\boldsymbol{F'(x) = 3x - 2}$ y la solución particular

cuando $\boldsymbol{F(1) = 3}$



$$\int (3x-2)\,dx = 3\int x\,dx - 2\int dx = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$$

Para encontrar la función dada la condición inicial, sustituimos el valor de x e igualamos al valor de su imagen:

$$\frac{3}{2}1^2 - 2\cdot 1 + C = 3 \Rightarrow \frac{3}{2} - 2 + C = 3 \Rightarrow C = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Por tanto, la función buscada es:

Familia de funciones $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$$

Ejemplos

$$\int (x+3)\,dx = \int x\,dx + \int 3\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

$$\int (x^3+2)\,dx = \int x^3\,dx + \int 2\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$

$$\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right) dx = \int \sqrt[3]{x}\,dx - \int \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx - \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}} + C$$

Regla general de la potencia

Si *u(x)* es una función derivable en x, entonces:

$$\int u^n \cdot \frac{du}{dx} dx = \int u^n du = \frac{1}{1+n} u^{n+1} + C, n \neq -1$$

Para poder utilizar esta regla primero hay que identificar la potencia y posteriormente encontrar, si es que se encuentra, la derivada de la base.

Ejemplos (regla de la potencia)

$$u(x) = 5x - 2$$

$$\int 5(5x-2)^3\,dx = \frac{1}{4}(5x-2)^4 + C$$

$$u'(x) = 5$$

$$u(x) = x^2 - 5$$

$$\int 2x\sqrt{x^2-5}\,dx = \int 2x(x^2-5)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}(x^2-5)^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(x^2-5)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$\int \frac{-6x}{(1-3x^2)^2}\,dx = \int -6x(1-3x^2)^{-2}\,dx = -\frac{1}{3}(1-3x^2)^{-3} + C$$

$$u(x) = 1 - 3x^2$$

Integrales de funciones exponenciales

Si *u(x)* es una función derivable en x, entonces:

$$\int e^{u} \frac{du}{dx} dx = \int e^{u}\, du = e^{u} + C$$

Para poder utilizar esta regla hay que identificar la exponencial y la derivada del exponente como factor.

Ejemplos (integrales de exponenciales)

$$\int 2e^{2x}\,dx = e^{2x} + C$$

$$\int (e^x + x)\,dx = \int e^x\,dx + \int x\,dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int e^{2x+1}\,dx = \int \frac{2}{2}e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1}$$

$$\int 7xe^{-x^2}dx = 7\int \frac{-2}{-2}xe^{-x^2}dx = -\frac{7}{2}\int -2xe^{-x^2}dx = -\frac{7}{2}e^{-x^2} + C$$

Funciones cuya integral es un logaritmo

Si *u(x)* es una función derivable en x, entonces:

$$\int \frac{{du}/{dx}}{u(x)}\,dx = Ln|u(x)| + C$$

Ejemplos

$$\int \frac{3}{x}dx = 3\int \frac{1}{x}dx = 3Ln|x| + C$$

$$\int \frac{x}{x^2}dx = \int \frac{2}{2}\frac{x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2}dx = \frac{1}{2}Lnx^2 + C$$

$$\int \frac{1}{3x+1}dx = \int \frac{3}{3}\frac{1}{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}dx = \frac{1}{3}Ln|3x+1| + C$$

ALGUNAS TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración por partes y de funciones racionales básicas

Integración por partes

Si *u(x) y v(x)* son funciones derivables en x, entonces:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v du$$

Esta técnica es interesante cuando hay que integrar un producto, o se encuentran expresiones relacionadas con funciones logarítmicas o exponenciales.

Dependiendo como se elija *u* y *v* la integral que queda pendiente puede ser mas sencilla o complicada de resolver.

Ejemplo I

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v du$$

$$u = x \;\Rightarrow du = dx$$
$$dv = e^{x}dx \Rightarrow v = e^{x}$$

$$\int xe^{x}dx = x\cdot e^{x} - \int e^{x}dx = x\cdot e^{x} - e^{x} + C = e^{x}(x-1) + C$$

La elección de cada elemento en este método se realiza normalmente en relación a la simplicidad de los elementos que resultan en la integral.

Ejemplo II

$$\int x^2 Lnx\,dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot Lnx - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x}dx = \frac{x^3 Lnx}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 Lnx}{3} - \frac{1}{9}x^3$$

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int vdu$$

$$u = Lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3$$

El cálculo de la función *v* se realiza integrando, por lo que hay que elegir *dv* de tal forma que la integral a realizar se calcule de forma sencilla.

Fracciones parciales

Podemos expresar el cociente de dos polinomios donde el polinomio numerador es de menor grado que el grado del polinomio denominador en sumas de cocientes de polinomios de menor grado.

Para realizar la descomposición se calculan las raíces del polinomio denominador. Posteriormente, de descompone el cociente dependiendo de la multiplicidad de las raíces (no se explica la descomposición en factores cuadráticos que es el caso general).

$$\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{n_1} \cdot (x-a_2)^{n_2} \cdots (x-a_m)^{n_m}} \; donde\ grado(Q(x)) = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

A cada factor del denominador le corresponde la suma de fracciones de la forma:

$$\frac{A_1}{(x-a_i)} + \frac{A_2}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{n_i}}{(x-a_i)^{n_i}}$$

Ejemplo I

$$\frac{x+7}{x^2-x-6}$$

El polinomio numerador tiene menor grado que el polinomio denominador. Procedemos a expresar el cociente con suma de fracciones parciales.

$$x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \ \ 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Calculamos las raíces del denominador:

Igualamos la expresión racional a la suma de fracciones parciales, atendiendo a la multiplicidad de las raíces:

$$\frac{x+7}{x^2-x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x+2)(x-3)}$$

Ejemplo I (continuación)

Igualando los anteriores numeradores y posteriormente igualando cada uno de los coeficientes de los polinomios:

$$x + 7 = A(x + 2) + B(x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7 = 2A - 3B \; para\ los\ coeficientes\ de\ grado\ cero \\ 1 = A + B \; para\ los\ coeficientes\ de\ primer\ grado \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

Por tanto la función racional puede expresarse como

$$\frac{x + 7}{x^2 - x - 6} = \frac{2}{x - 3} + \frac{-1}{x + 2}$$

Ejemplo II

$$\frac{1}{x(x-1)^2}$$

El polinomio numerador tiene menor grado que el polinomio denominador. Procedemos a expresar el cociente con suma de fracciones parciales (ya se encuentra el polinomio denominador factorizado).

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

Igualando los coeficientes de los numeradores de ambas expresiones:

$$\begin{cases} A + B = 0 & (coeficientes\ de\ grado\ 2) \\ -2A - B + C = 0 & (coeficientes\ de\ grado\ 1) \\ A = 1 & (términos\ independientes) \end{cases}$$

Ejemplo II (continuación)

Resolviendo el sistema lineal queda:

$A = 1\ ;\ B = -1\ y\ C = 1$

Por tanto la función racional puede expresarse como

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Integrales de funciones racionales

Una función racional es un cociente entre dos funciones polinómicas, teniendo la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

El método para resolver una de estas integrales pasa en primer lugar por reducir esta expresión a otra equivalente, donde el polinomio denominador tenga mayor grado que el polinomio del numerador. Esto se puede conseguir dividiendo ambos polinomios.

Posteriormente, se procederá a expresar el cociente de polinomios como suma de fracciones parciales.

Ejemplos I

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx = \int \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+2}dx = \int \frac{2}{x-3}dx - \int \frac{1}{x+2}dx =$$

$$\frac{x+7}{x^2-x-6} = \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+2}$$

Expresamos la función racional como fracciones parciales

$$= 2Ln(x-3) - Ln(x+2) + C$$

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Expresamos la función racional como fracciones parciales

$$= Lnx - Ln(x-1) - (x-1)^{-1} + C$$

Ejemplos II

$$\int \frac{x^5+x-1}{x^4-x^3}dx = \int x+1+\frac{x^3+x-1}{x^4-x^3}dx = \int x\,dx + \int dx + \int \frac{x^3+x-1}{x^4-x^3}dx =$$

$$\frac{x^5+x-1}{x^4-x^3} = x+1+\frac{x^3+x-1}{x^4-x^3}$$

El polinomio del numerador de la función racional tiene mayor grado que el denominador, por tanto, dividimos

$$= \frac{x^2}{2}+x+\int \frac{x^3+x-1}{x^4-x^3}dx = \frac{x^2}{2}+x+\int \frac{1}{x^3}+\frac{1}{x-1}dx =$$

Expresamos la función racional que queda por integrar con fracciones parciales

$$\frac{x^3+x-1}{x^4-x^3} = \frac{x^3+x-1}{x^3(x-1)} = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{x-1}$$

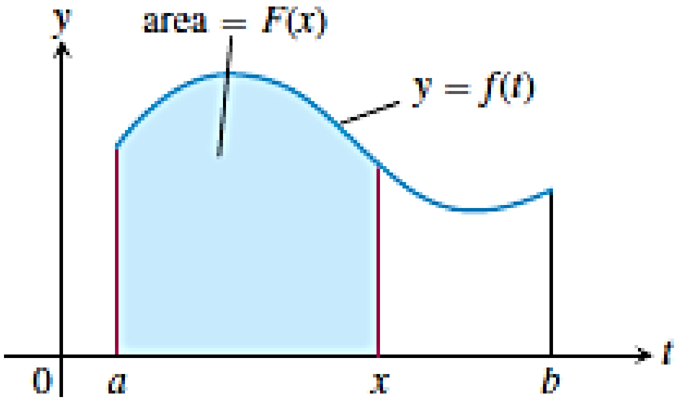
$$= \frac{x^2}{2}+x+\int \frac{1}{x^3}dx+\int \frac{1}{x-1}dx = \frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2x^2}+Ln(x-1)+C$$

ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Integral definida y regla de Barrow

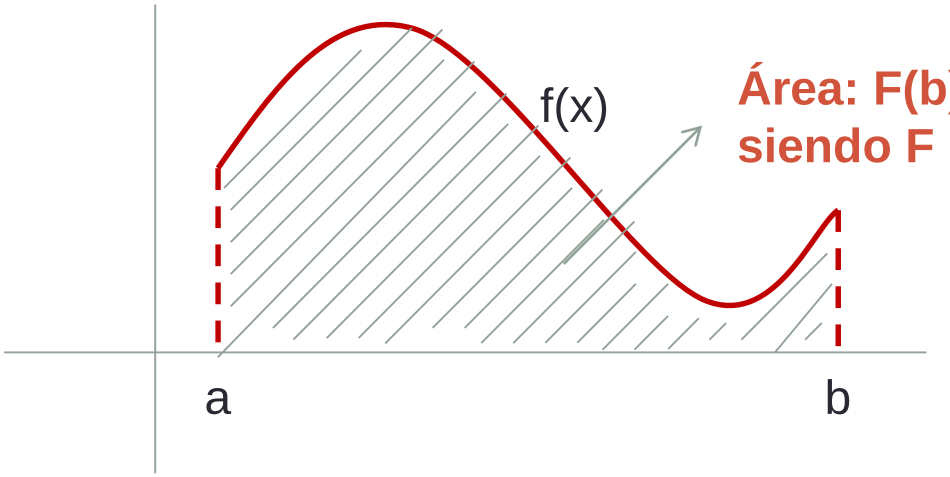
Teorema fundamental del cálculo

Si una función ***f*** continua en el intervalo [a,b] y ***f*** es mayor o igual que cero y ***F*** , que mide el área sombreada, se encuentra definida en dicho intervalo: entonces se verifica que ***F*** es derivable y su derivada coincide con la función ***f*** para cualquier valor de intervalo [a,b].



Cálculo de áreas

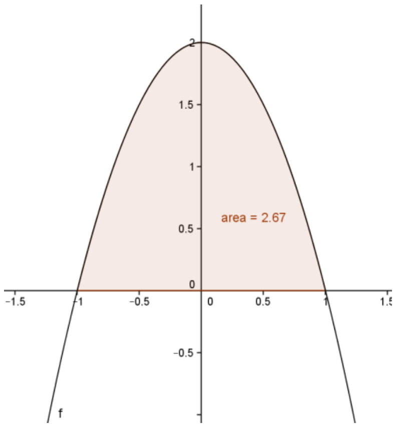
Si una función ***f*** continua en el intervalo [a,b] y ***f*** es mayor o igual que cero y deseamos calcular el área limitada por la función, el eje de abcisas y las rectas verticales ***x=a*** y ***x=b***, entonces podemos calcular una función primitiva de ***f*** , (sea ***F***) siendo el área ***F(b) – F(a).***



Área: F(b)-F(a)
siendo F una primitiva de f

Ejemplo

Cálculo del área del recinto limitado por la función $f(x) = -2x^2 + 2$, el eje de abcisas y las rectas x = -1 y x = 1.



Puesto que la función es positiva en el intervalo [-1,1], bastará con calcular una primitiva de la función ***f***.

$$F(x) = \int -2x^2 + 2dx = -\frac{2}{3}x^3 + 2x$$

Área:

$$F(1) - F(-1) = -\frac{2}{3}1^3 + 2 \cdot 1 + \frac{2}{3}(-1)^3 - 2 \cdot (-1) = \frac{8}{3}$$ unidades cuadradas

Integral definida

Si ***f*** es una función continua y mayor o igual que cero en el intervalo [a,b], se llama integral definida de ***f*** entre ***a*** y ***b*** al área de la región limitada por la curva ***y=f(x)***, el eje OX y las rectas verticales *x*=*a* y *x*=*b*. Se representará por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

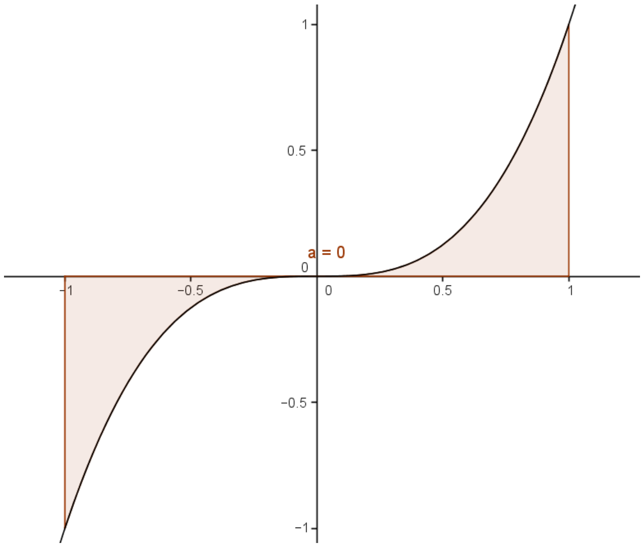
Si ***f*** es una función continua y menor o igual que cero en el intervalo [a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx$ será el opuesto del área anteriormente descrita.

Si ***f*** es una función continua que va cambiando de signo a lo largo del intervalo [a,b], es posible dividir el intervalo en otros mas pequeños que cumplan con alguna de las anteriores condiciones.

Regla de Barrow

Si ***f*** es una función continua en el intervalo [a,b], y ***F*** es cualquier primitiva de ***f*** entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{4}(-1)^4 = 0$$

Primitiva

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

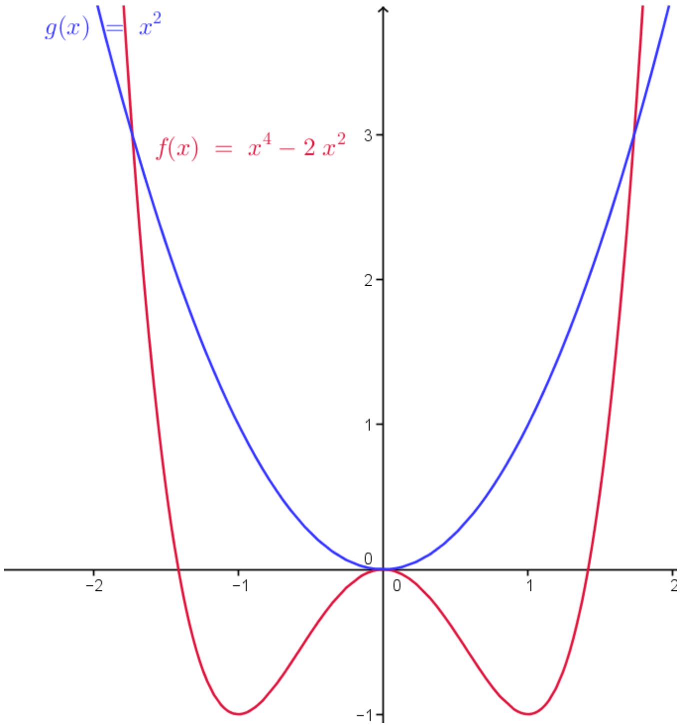
Teorema del valor medio del cálculo integral

Si ***f*** es una función continua en el intervalo [a,b], existe un valor ***c*** entre ***a*** y ***b*** tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Al número ***f(c)*** se le llama valor medio de ***f*** del intervalo [a,b].

Cálculo de áreas entre dos curvas I



Vamos a calcular el área limitado por las funciones $f(x) = x^4 - 2x^3$ y $g(x) = x^2$

Primero calculamos los puntos de corte entre las dos funciones, resolvemos la ecuación $x^2 = x^4 - 2x^2$, por tanto:

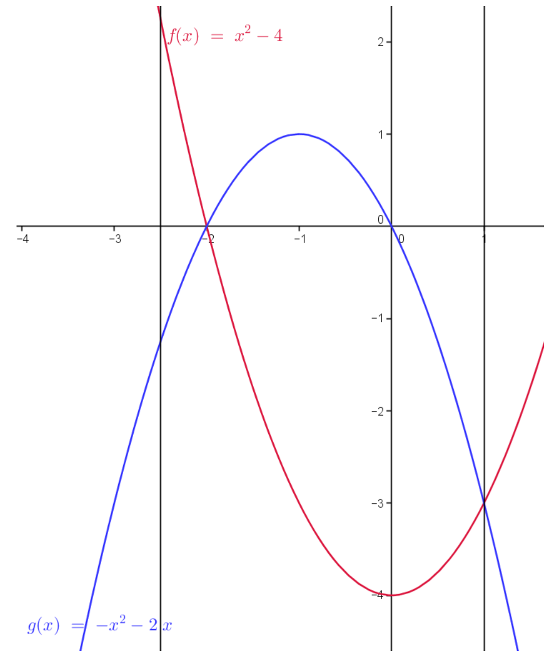
$$x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Cómo la gráfica de g(x) queda por encima de la gráfica de f(x), el área se pude calcular con la siguiente integral:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (g(x) - f(x))dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} -x^4 + 3x^2 dx = -\frac{x^5}{5} + x^3 \Big[_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{12}{5}\sqrt{3}$$

Cálculo de áreas entre dos curvas II

Vamos a calcular el área limitado por las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -x^2 - 2x$ entre los puntos x = -2.5 y x = 1



En este caso la función *f* queda por encima de g en el intervalo [-2.5,-2] y al contrario en el intervalo [-2,1]. Por tanto, el área puede calcularse utilizando la siguiente suma:

$$\int_{-2.5}^{-2} \big(f(x) - g(x)\big)dx + \int_{-2}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

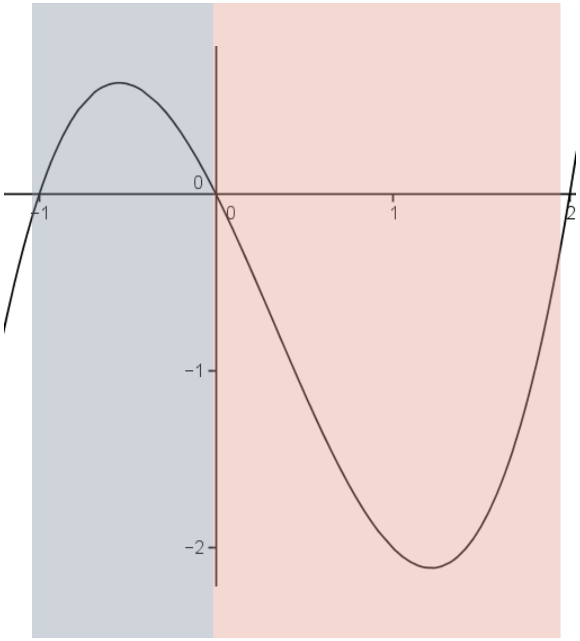
$$\int_{-2.5}^{-2} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-2.5}^{-2} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 4x \Big[_{-2.5}^{-2} = \frac{5}{6}$$

$$\int_{-2}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)dx = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \Big[_{-2}^{1} = 9$$

Solución: $\frac{5}{6} + 9 = \frac{59}{6}$

Cálculo del área entre OX y una curva

Vamos a calcular el área limitado por la función $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje OX.



En este caso la función *f* queda por encima del eje OX en el intervalo [-2,0], quedando por debajo en el intervalo [0,1].
Por tanto el área vendrá definido por la integral:

$$Área = \int_{-1}^{0} x^3 - x^2 - 2xdx + \left| \int_{0}^{2} x^3 - x^2 - 2xdx \right|$$

$$Área = \int_{-1}^{0} x^3 - x^2 - 2xdx + \left| \int_{0}^{2} x^3 - x^2 - 2xdx \right| = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \Big]_{-1}^{0}$$

$$+\left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \Big]_{0}^{2} \right| = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 + \left| 4 - \frac{8}{3} - 4 \right| = \frac{5}{12} + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$$

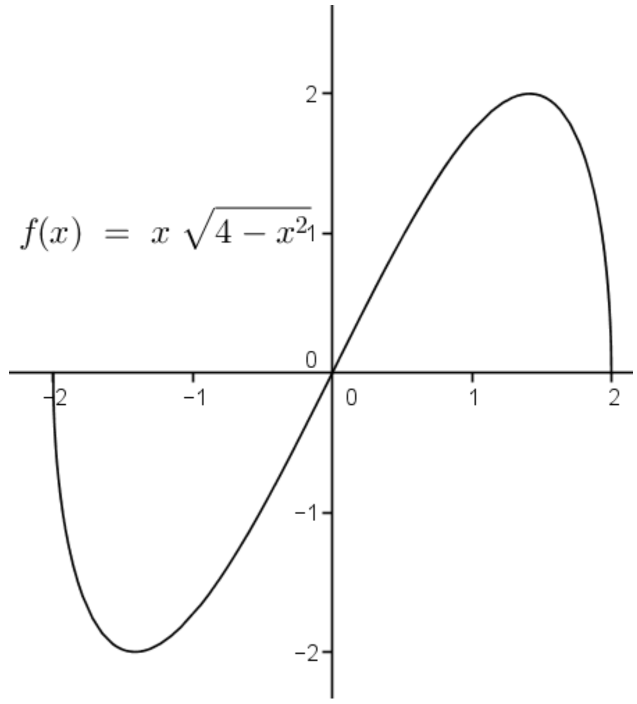
Cálculo del área entre OX y una función impar I

Vamos a calcular el área limitado por la función $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$ y el eje OX. Para este fin primero se comprueba que la función es impar:

$f(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$ y $f(-x) = -x\sqrt{(-x)^2 - 4} = -f(x)$

Como puede observarse, los punto de corte con los ejes son (-2,0), (0,0) y (2,0).

Formándose dos áreas del mismo tamaño, por tanto para el cálculo del total podemos utilizar el doble del área limitada por la función y el eje OX desde (0,0) hasta (2,0)



Cálculo del área entre OX y una función impar II

$$\acute{A}rea = 2\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx = 2\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(4-x^2)^3}\right)\Big]_0^2$$
$$= \frac{16}{3}$$