Semana 10

1. Como cada año, el inicio del curso académico, una tienda de material escolar prepara una oferta de 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para los alumnos de un IES, empaquetando el material de dos formas distintas. El primer paquete contiene 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos, mientras que el segundo contiene 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. El primer paquete se vende al precio de 6,50 euros, mientras que el segundo se vende a 7 euros. Usando técnicas de programación lineal, ¿cuántos paquetes de cada tipo han de realizar para obtener la máxima recaudación? ¿A cuánto asciende dicha recaudación?

Solución

Se trata de un problema de programación lineal. Identificaremos las variables:

$$x \equiv Cantidad\ del\ primer\ tipo\ de\ paquete$$

$$y \equiv Cantidad\ del\ segundo\ tipo\ de\ paquete$$

La función a maximizar (función objetivo) será:

$$F(x,y) = 6.5x + 7y$$

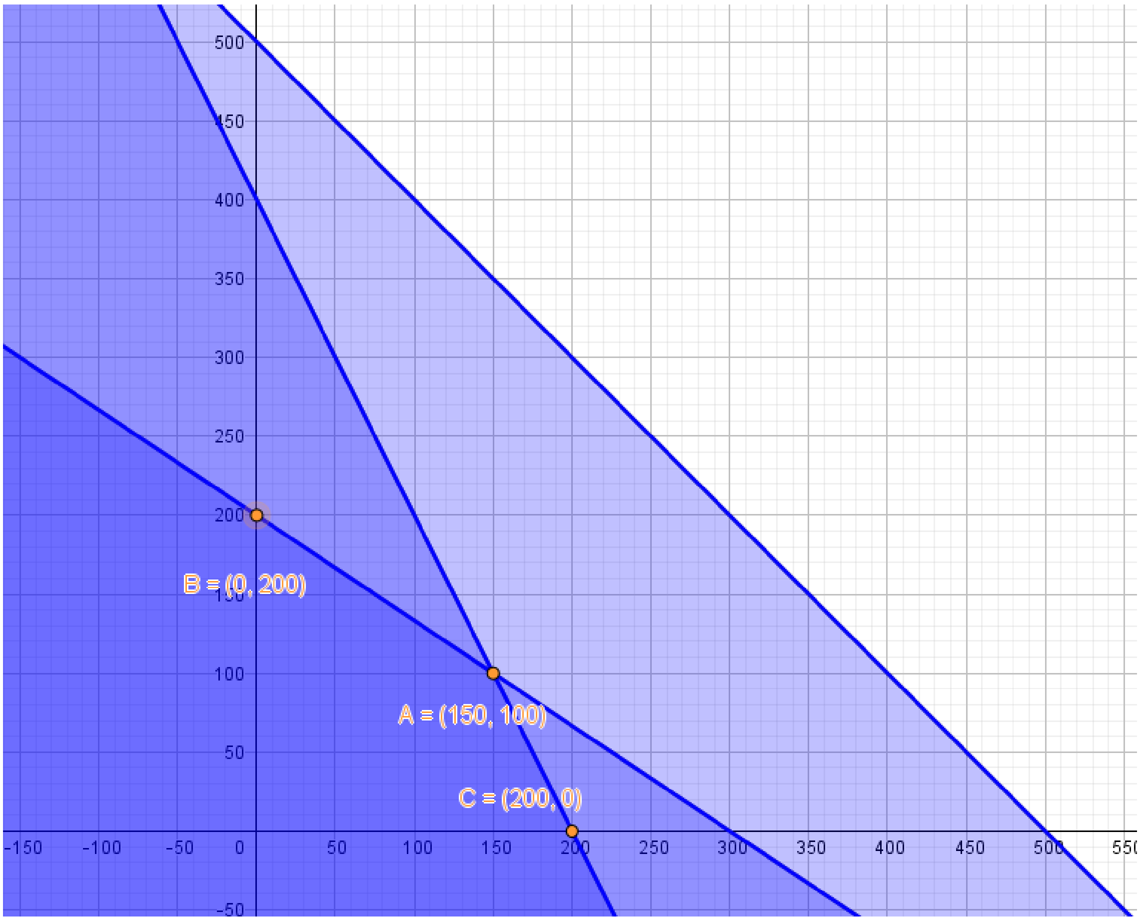
Para calcular las restricciones, crearemos una tabla:

	Cuadernos	Carpetas	Bolígrafos
Primer tipo	2	1	2
Segundo tipo	3	1	1

Por tanto, teniendo en cuenta el contenido de la tabla y el significado de las variables Las restricciones son:

$$2x + 3y \leq 600\ ; x + y \leq 500; 2x + y \leq 400; x \geq 0; y \geq 0$$

Representemos gráficamente la región factible definida por el sistema de inecuaciones:



Los vértices de la región factible contienen los valores donde se obtiene el valor máximo. Evaluemos la función objetivo:

$$F(150{,}100) = 6.5 \cdot 150 + 7 \cdot 100 = 1675$$

$$F(0{,}200) = 150 \cdot 0 + 7 \cdot 200 = 1400$$

$$F(200{,}0) = 6.5 \cdot 200 + 7 \cdot 0 = 1300$$

Por tanto, el beneficio máximo se obtiene cuando se preparan 150 lotes del primer tipo y 100 del segundo, obteniéndose una beneficio de 1675 euros.

2. El beneficio obtenido por una empresa depende del capital inicial z invertido en la empresa a través de la expresión $h(z) = -z^2 + 6z - 5$. ¿Para qué valores de z la empresa obtiene beneficios máximos? ¿Para qué valores de z la empresa obtiene beneficios positivos?

Solución

Calcularemos los puntos críticos de la función, es decir, los valores que anulan su derivada:

$$h'(z) = -2x + 6\,;\ -2x + 6 = 0\,; x = 3$$

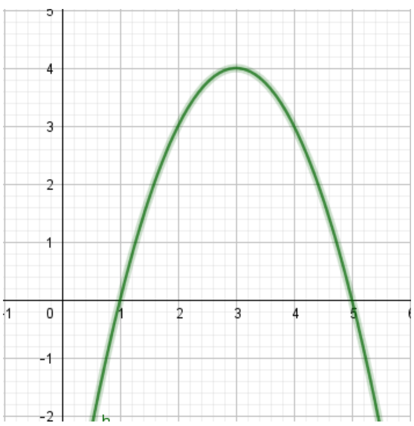
Cómo se puede observar a la izquierda de 3 (valores menores que 3) la derivada es positiva, por tanto, la función es creciente. A la derecha de 3, la función derivada es negativa, por lo que la función es decreciente. Por tanto, en 3 la función alcanza un máximo que es absoluto al ser la función continua en todos los reales, ser estrictamente creciente hasta 3 y ser estrictamente decreciente para valores mayores que 3. También se puede argumentar que se trata de una parábola con las ramas hacia abajo (su coeficiente principal es negativo) y por tanto dicha función tiene un máximo.

El máximo beneficio es: $h(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4$

Calcularemos los puntos de corte con el eje de abscisas para calcular el intervalo donde la empresa obtiene beneficios positivos:

$$-z^2 + 6z - 5 = 0\,; z = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{-2} = \begin{cases} z = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

Por tanto, los beneficios son positivos entre 1 y 5.



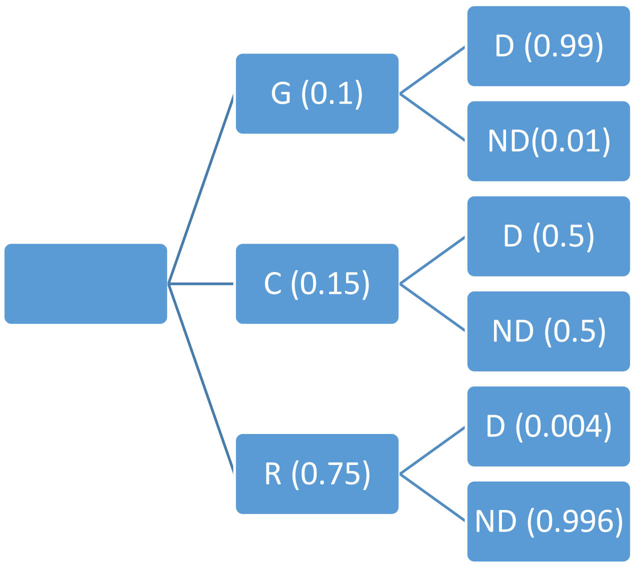
3. Hay una epidemia de gripe. Un síntoma muy común es el dolor de cabeza, pero este síntoma también se presenta en personas que tienen un catarro común y en personas que no tienen ningún trastorno serio. La probabilidad de tener dolor de cabeza, padeciendo gripe, catarro y no teniendo nada serio es 0.99, 0.5 y 0.004 respectivamente. Por otra parte, se sabe que el 10 % de la población tiene gripe, el 15 % catarro y el resto nada serio. Se desea saber:

   a. Elegida al azar una persona, ¿qué probabilidad hay de que tenga dolor de cabeza?

   b. Se sabe que una determinada persona tiene dolor de cabeza, ¿cuál es la probabilidad de que tenga gripe?

Solución

Toda la población se puede incluir en cada uno de los grupos que se enuncian: tener gripe, tener catarro y el “resto”. Todos estos conjuntos son disjuntos (sucesos incompatibles) y su unión se corresponde con todo el espacio muestral. Además, el suceso tener dolor de cabeza depende del grupo al que se pertenece. Por tanto, el primer apartado puede ser resuelto aplicando el teorema de la probabilidad total, mientras que para el segundo utilizaremos el teorema de Bayes. Para facilitar los cálculos construiremos un esquema en forma de árbol.



Definimos los sucesos:

$G \equiv Tener\ gripe\ ; C \equiv Tener\ catarro; R \equiv Resto;$

$D \equiv Tener\ dolor\ de\ cabeza$

$P(D) = P(G) \cdot P(D/G) + P(C) \cdot P(D/C) + P(R) \cdot P(D/R) =$

$= 0.1 \cdot 0.99 + 0.15 \cdot 0.5 + 0.75 \cdot 0.004 = 0.177$

Para el segundo apartado utilizamos el teorema de Bayes:

$$P(G/D) = \frac{P(G) \cdot P(D/G)}{P(D)} = \frac{0.1 \cdot 0.99}{0.177} = 0.56$$