Semana 1

1. Encuentra, si existen, matrices cuadradas A, de orden 2, distintas de la matriz identidad, tales que:

$$A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}A$$

Solución

Sea $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, multiplicando a derecha e izquierda de la matriz dada queda:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{pmatrix}$$

Por tanto, resulta igualando elemento a elemento de la matriz las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b=a\\ b=b\\ c+d=a+c\\ d=b+d\end{cases}$$

De la última ecuación resulta que $b=0$, de la tercera ecuación resulta que $d=a$ y de la primera ecuación se deduce que el valor de *a* puede ser cualquiera. Por tanto, la matriz buscada debe tener la forma:

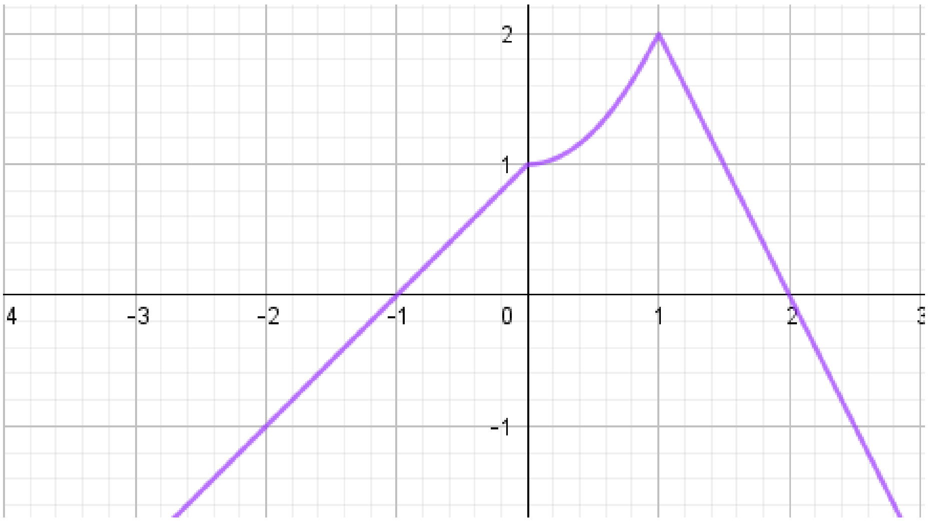
$A = \begin{pmatrix}a & 0\\ c & a\end{pmatrix}$ donde a y c son cualquier valor real.

2. Calcula el área del limitado por la función f y el eje de abscisas:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \;\; si\; x<0\\ x^2+1 \; si\;\; 0\le x<1\\ -2x+4 \;\; si\; x\ge 1\end{cases}$$

Solución

Primero, realizaremos un esbozo de la gráfica de la función:



Por tanto, el área solicitada coincide con la siguiente integral:

$$Area = \int_{-1}^{0} x + 1\, dx + \int_{0}^{1} x^2 + 1\ \, dx + \int_{1}^{2} -2x + 4\, dx$$

$$\int x + 1\, dx = \frac{x^2}{2} + x, por\ tanto, \int_{-1}^{0} x + 1\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\int x^2 + 1\, dx = \frac{x^3}{3} + x, por\ tanto, \int_{0}^{1} x^2 + 1\ \, dx = \frac{4}{3}$$

$$\int -2x + 4\, dx = -x^2 + 4x, por\ tanto, \int_{1}^{2} -2x + 4\, dx = 1$$

Por tanto, el área total es

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{17}{6}\ unidades\ de\ superficie$$

3. Para la temporada de rebajas, un comerciante decide poner a la venta 70 camisetas, 120 camisas y 110 pantalones en dos tipos de lotes. El lote A formado por 2 camisas, 1 pantalón y 1 camiseta se venderá a 60 euros, mientras que el lote B, formado por 1 camisa, 2 pantalones y 1 camiseta se venderá a 70 euros. ¿Cuántos lotes ha de hacer de cada clase para obtener el máximo de recaudación y cuánto dinero ingresará?

Solución

	camisetas	camisas	pantalones	precio
Lote A	1	2	1	60

Lote B	1	1	2	70

Se trata de un problema de optimización. Las variables a utilizar serán las siguientes:

$$x \equiv Cantidad\ de\ lotes\ de\ tipo\ A;$$

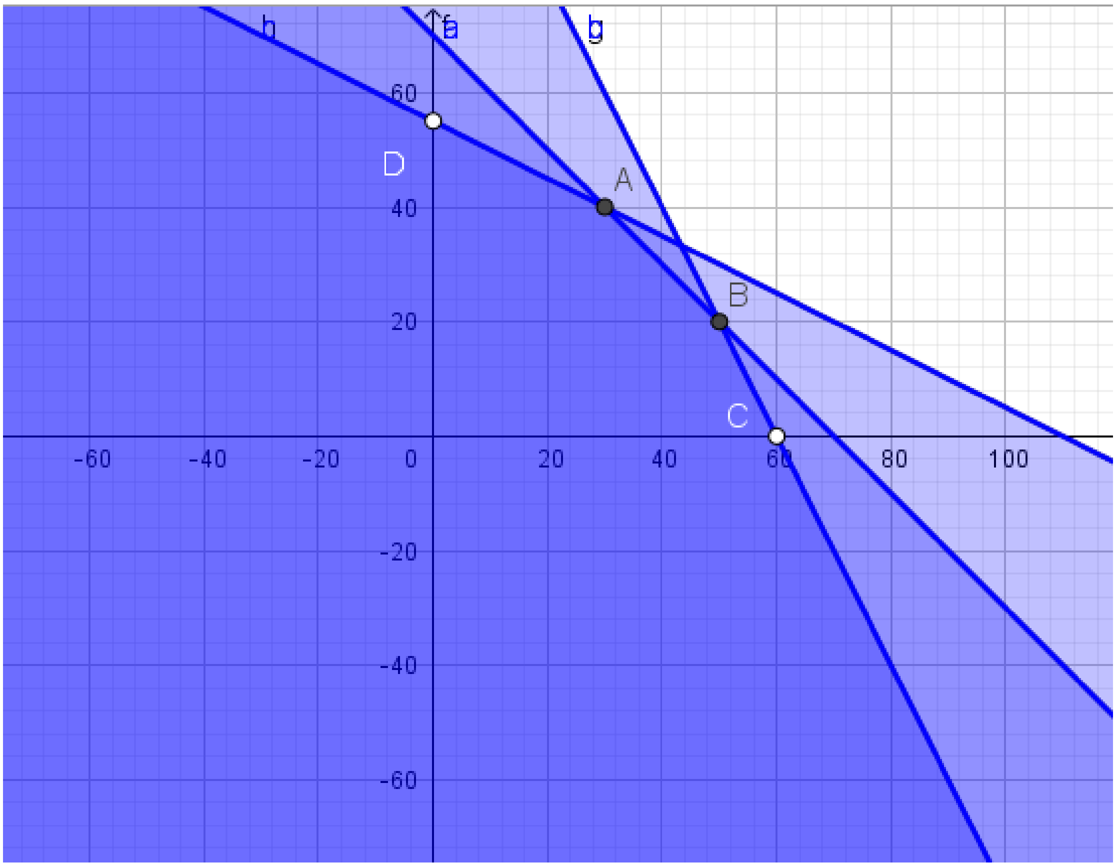
$$y \equiv Cantidad\ de\ lotes\ de\ tipo\ B$$

La función a maximizar (función objetivo) será:

$$F(x,y) = 60x + 70y$$

Las restricciones son:

$$x \geq 0\ ; y \geq 0; x + y \leq 70\ ; 2x + y \leq 120\ ; x + 2y \leq 110$$



Los puntos a tener en cuenta son:

A=(30,40)

B=(50,20)

C=(60,0)

D=(0,55)

Vamos a evaluar los puntos en la función objetivo:

F(30,40)=60·30+70·40= 4600

F(50,20)=60·50+70·20= 4400

F(60,0)=60·60+70·0=3600

F(0,55)=60·0+70·55=3850

Por tanto, se alcanza el máximo beneficio al vender 30 lotes de tipo A y 40 lotes de tipo B. El beneficio será de 4600 euros.