Semana 2

1. Una fábrica produce dos modelos de aparatos de radio, A y B. La capacidad de producción de aparatos de tipo A es de 60 unidades por día y para el tipo B de 75 unidades por día. Cada aparato de tipo A necesita 10 piezas de un componente electrónico y 8 piezas para los del tipo B. Cada día se dispone de 800 piezas del componente electrónico. La ganancia por cada aparato producido de los modelos A y B es de 30 euros y 20 euros, respectivamente. Determina la producción diaria de cada modelo que maximiza la ganancia.

Solución

Se trata de un problema de programación lineal. Definimos las variables:

$x \equiv Aparatos\ producidos\ de\ tipo\ A$

$y \equiv Aparatos\ producidos\ de\ tipo\ B$

Las restricciones vienen dadas por:

$x \leq 60\ (límite\ de\ producción\ de\ aparatos\ de\ tipo\ A)$

$y \leq 75\ (límite\ de\ producción\ de\ aparatos\ de\ tipo\ B)$

$10x + 8y \leq 800\ solamente\ se\ disponen\ de\ 800\ piezas$

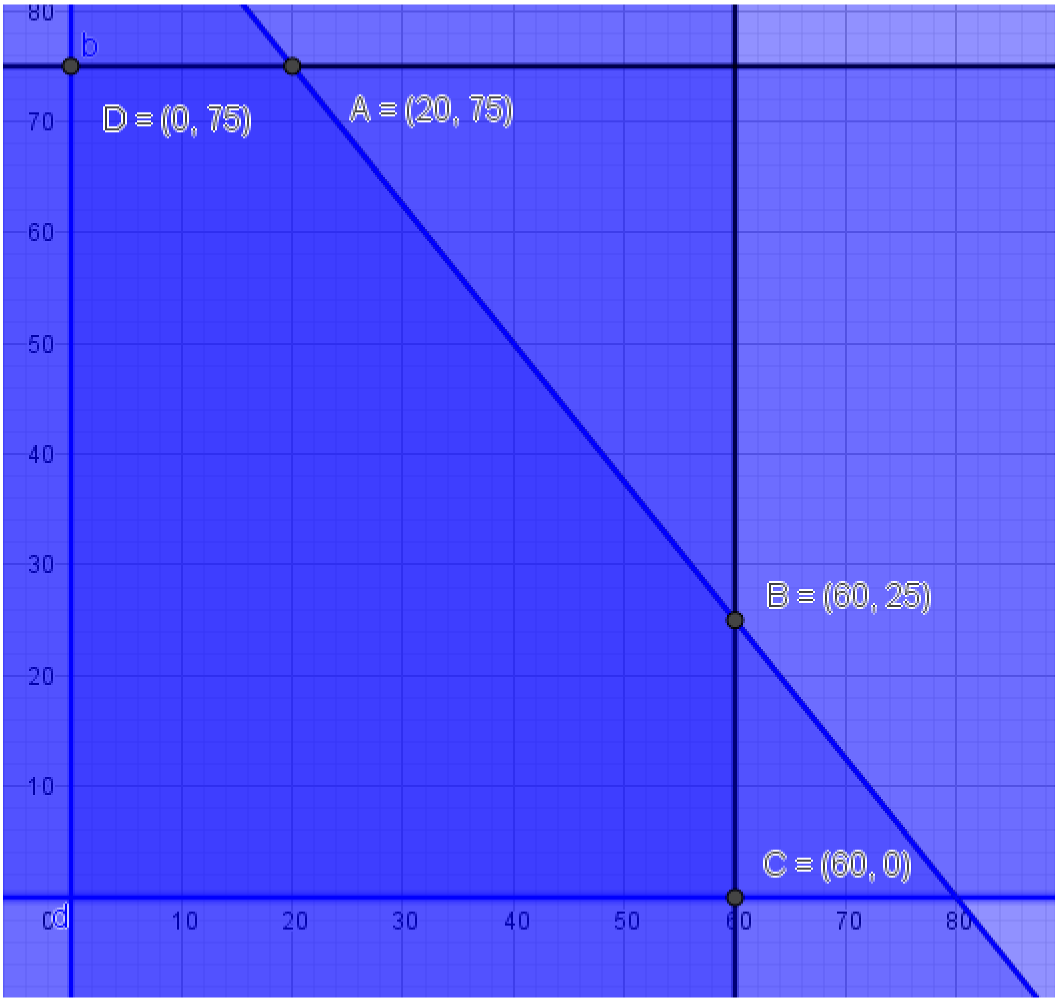
$x \geq 0\ e\ y \geq 0$

Por último, la función objetivo es:

$$F(x, y) = 30x + 20y$$

Calculamos la región factible y encontramos los vértices:

A(20,75) B(60,25) C(60,0) D(0,75)



Evaluamos la función objetivo en cada uno de los vértices para encontrar el valor máximo:

$$F(20{,}75) = 30 \cdot 20 + 20 \cdot 75 = 600 + 1500 = 2100$$

$$F(60{,}25) = 30 \cdot 60 + 20 \cdot 25 = 1800 + 500 = 2300$$

$$F(60{,}0) = 30 \cdot 60 + 20 \cdot 0 = 1800$$

$$F(0{,}75) = 0 \cdot 20 + 20 \cdot 75 = 1500$$

Por tanto, la fabricación de 60 aparatos del tipo A y 25 aparatos del tipo B maximizará la función que tomará el valor de 2300 euros.

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}\ C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} y\ D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

donde x, y, z son desconocidos.

   a. Calcula las matrices $(AB) + C\ y\ 3D$

b. Sabiendo que $(AB) + C = 3D$, plantea el sistema de ecuaciones para encontrar los valores x, y , z.

c. Estudia el sistema anterior. ¿Cuántas soluciones tiene? Encuentra una si es posible.

Solución

a. $(AB) + C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$

$3D = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $por\ tanto$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. Estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada. Como podemos observar las columnas 1 y 3 de la matriz de coeficientes son iguales, por tanto, el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Calculemos el rango de la matriz ampliada:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ por tanto, el rango de la matriz ampliada también es 2, al coincidir los rangos de ambas matrices, por el teorema de Roche-Frobenius, el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es mayor que el rango, el sistema es indeterminado.

Parametricemos el conjunto de soluciones:

$z = t$ y realizando la operación por filas $-2F_1 + F_2 \to F_2$

Tendremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el conjunto de soluciones queda:

$$x = 1 - t;\ y = 2, z = t$$

Una solución particular se podría obtener para

$$t = 0 \; y \; sería \; x = 1; \; y = 2 \; ; z = 0$$

3. La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función $C(x) = 90 + 15x - 0{,}6x^2$, donde x es el tiempo transcurrido desde 1 de enero de 1990 contado en años.

    a. ¿Hasta qué año está creciendo la concentración de ozono?

    b. ¿Cuál es la concentración máxima de ozono que se alcanza en esa ciudad?

Solución

La función es una parábola con las ramas hacia abajo, pues el coeficiente principal es negativo. Para calcular la monotonía de la función calcularemos su derivada y los puntos críticos:

$$C'(x) = -1{,}2x + 15$$

Calculamos los puntos críticos:

$$-1{,}2x + 15 = 0 \; ; x = 12{,}5$$

$Cuando \; x < 12{,}5 \; , C'(x) > 0 \; por \; tanto \; la \; función \; es \; creciente$

$Cuando \; x > 12{,}5 \; , C'(x) < 0 \; por \; tanto \; la \; función \; es \; creciente$

Por tanto, durante doce años y medio la concentración de ozono crece, es decir, hasta mediados del año 2002.

La concentración máxima será de

$$C(12{,}5) = 90 + 15 \cdot 12{,}5 - 0{,}6 \cdot 12{,}5^2$$
$$= 183{,}75 \; microgramos \; por \; metro \; cúbico$$