Semana 3

1. Sea $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$

   a. Calcula A^2

   b. Calcula todos los valores de x e y para los que se verifica que $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

a) $A^2 = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix}$

b) Igualando:

$$\begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Resultan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2-1 = x+1 \\ -x-y = -2 \\ x+y = 2 \\ y^2-1 = -1 \end{cases}$$

De la primera ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ se obtiene $x = -1 \; y \; x = 2$.

De la cuarta ecuación se obtiene que $y = 0$

La segunda y tercera ecuación relacionan *x* e *y*, veamos las dos opciones:

Si *x=-1* e *y=0*, no se verifican ninguna de las dos, por tanto, no es solución.

Si *x=2* e *y=0*, se verifican ambas ecuaciones, por tanto, esta es la única solución.

2. Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx$ tiene un máximo en $(3{,}8)$

   a. Calcula los valores de *a* y *b*.

b. Para dichos valores, calcula la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en el punto de abscisa 0.

Solución

a) El punto dado debe pertenecer a la función, por tanto: $f(3) = 8 \implies a3^2 + 3b = 8 \implies 9a + 3b = 8$
Como alcanza un máximo debe ocurrir que ese punto es crítico, es decir, que la derivada de la función se anule para el valor *3*.

$$f'(x) = 2ax + b \;;\; f'(3) = 6a + b \,;\, 6a + b = 0$$

Resolviendo el sistema lineal formado por las anteriores ecuaciones:

$$\begin{cases} 9a + 3b = 8 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \implies b = -6a\,; sustituyendo; 9a - 18a = 8;$$

$$a = -\frac{8}{9} \;\; y\, b = \frac{48}{9}$$

b) La función a utilizar es $f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{48}{9}x$, el punto por el que pasará la recta tangente es $(0, f(0)) = (0,0)$ y la pendiente de la recta coincide con el valor de la derivada en 0.

$$f'(0) = \frac{48}{9}$$

Por tanto, la recta tiene por ecuación $y = \frac{48}{9}x$.

3. En una determinada empresa se fabrican x unidades de un producto, y la función de beneficio viene dada por $B(x) = -x^2 + 12x - 20$

a. Calcula el número de unidades producidas x que deben fabricarse para que no haya ni beneficios ni pérdidas.

b. Calcula el número de unidades x que deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

Solución

a) La variable independiente representa el número de unidades de producto, mientras que la variable dependiente representa el beneficio. Para que no se produzcan pérdidas ni beneficios, la función debe ser nula. Por tanto, calculamos los valores de *x* que hacen 0 la función:

$$-x^2 + 12x - 20 = 0; x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-1)(-20)}}{-2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = 10 \end{cases}$$

Por tanto, se deben fabricar o 2 o 10 productos para que no se produzcan ni pérdidas ni beneficios.

b) Calcularemos los puntos críticos de la función, y estudiaremos la monotonía.

$$B'(x) = -2x + 12\ ;\ -2x + 12 = 0\ ; x = 6$$

$Para\ x < 6\ \ B'(x) >\ 0$

$por\ tanto\ la\ función\ es\ creciente\ en\ (-\infty, 6)$

$Para\ x > 6\ \ B'(x) <\ 0$

$por\ tanto\ la\ función\ es\ creciente\ en\ (-\infty, 6)$

Por tanto, la función tiene un máximo en x=6. El valor de ese máximo es: $B(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 20 = 16$