Semana 4

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   a. Calcula A^2 y expresa el resultado en función de la matriz identidad.

   b. Utiliza la relación hallada con la matriz identidad para calcular A^{2005}.

Solución

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \mathrm{I}$

b) Como $A^{2005} = A^{2\cdot 1002+1} = A^{2\cdot 1002} \cdot A = (A^2)^{1002} \cdot A = (-1)^{1002} \cdot I^{2002} \cdot A = 1 \cdot I \cdot A = A$

2. Se considera la función $f(x) = -ax^2 + 5x - 4$

   a. Calcula el valor de a para que la recta tangente a la función en el punto de abscisa x=3 corte al eje OX en el punto de abscisa x=5.

   b. Calcula el área de la región limitada por dicha tangente, el eje OX y la función f(x), para el valor de a obtenido anteriormente.

Solución

a) Sabemos que la función debe pasar por:

$f(3) = -a \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 4 = -9a + 11$

Además, la pendiente de la recta tangente en x=3 a la función coincide con el valor de la derivada en el valor de la abscisa:

$$f'(\mathrm{x}) = -2ax + 5, por\ tanto, f'(3) = -6a + 5$$

La recta tiene la forma $y = (-6a + 5)x + n$, sabemos también que cuando y=0 x=5, por tanto:

$$0 = (-6a + 5)5 + n$$

Y que cuando $x = 3\ entonces\ y = -9a + 11$, sustituyendo en la recta:

$$-9a + 11 = (-6a + 5)3 + n$$

Queda un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas, primero simplificaremos las ecuaciones y después resolveremos:

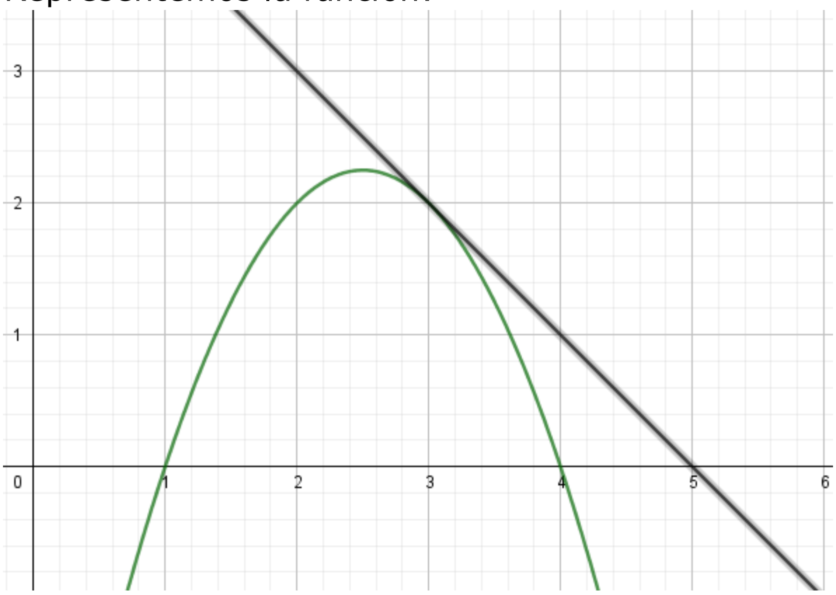
$$\begin{cases} -30a + n = -25 \\ 9a - n = 4 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$a = 1\ y\ n = 5$$

Por tanto, la recta buscada es: $y = -x + 5$

b) La función a utilizar es $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.
Representemos la función:



Cómo podemos observar podemos calcular el área pedida, calculando el área del triángulo rectángulo de base 2 unidades y altura 2 unidades, cuya hipotenusa se encuentra sobre la recta tangente (2 unidades de superficie) y debemos restar a dicha cantidad el área comprendida entre 3 y 4 de f(x) y el eje OX:

$$Area\_parabola = \int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^5 (-x^2 + 5x - 4)dx =$$

$$F(x) = \int (-x^2 + 5x - 4)dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x$$

$$Area_{parabola} = F(4) - F(3) = \frac{7}{6}$$

$$Por\ tanto, Area_{total} = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6}$$

3. En una ebanistería se fabrican dos tipos de mesas: mesas de comedor y mesas para ordenador. Las mesas de comedor necesitan 4 m^2 de madera y las mesas para ordenador 3 m^2. El fabricante dispone de 60 m^2 de madera y decide confeccionar al menos 3 mesas de comedor y al menos el doble de mesas de ordenador que de mesas de comedor. Además, por cada mesa de ordenador obtiene un beneficio de 200 €, mientras que obtiene un beneficio de 300 € por cada mesa de comedor. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe fabricar para obtener el beneficio máximo?

Solución

Sean las variables de decisión:

$$\begin{cases} x \equiv Número\ de\ mesas\ de\ comedor \\ y \equiv Número\ \ de\ mesas\ de\ ordenador \end{cases}$$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 60 \\ x \geq 3\ ; y - 2x \geq 0 \\ x \geq 0\ ; y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo es $F(x, y) \equiv 200x + 300y$

Representando las restricciones, tendremos la región factible. Los vértices de la región factible son:

$$A(6{,}12), B(3{,}16)\ y\ C(3{,}6)$$

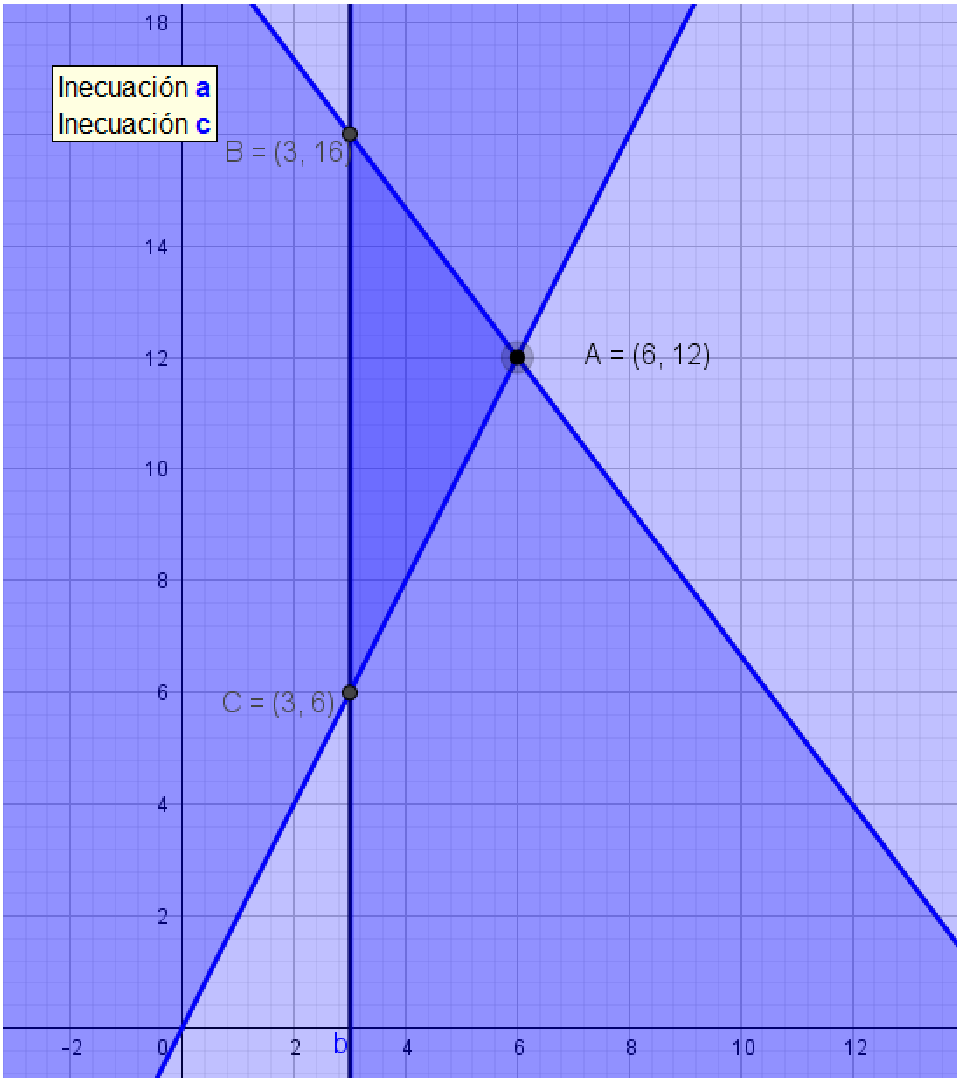
En los vértices se alcanzará el máximo, evaluemos la función objetivo en cada uno de los puntos:

$F(6{,}12) \equiv 1200 + 3600 = 4800$

$F(3{,}16) \equiv 600 + 4800 = 5400$

$F(3{,}6) \equiv 600 + 1800 = 2400$

Por tanto, el máximo beneficio alcanzado es de 5400 € haciendo 3 mesas de comedor y 16 mesas de ordenador.



Inecuación a
Inecuación c
B = (3, 16)
A = (6, 12)
C = (3, 6)
b
18
14
12
10
8
6
4
2
-2
0
2
4
6
8
10
12