Semana 5

1. Representa gráficamente las curvas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 1 - 2x$. Calcula el área del recinto que limitan dichas curvas.

Solución

La primera función es un polinomio de grado 2, por tanto, es una parábola tiene las ramas hacia arriba (su coeficiente principal es positivo), por tanto, en su vértice tiene un mínimo. Calcularemos:

Puntos de corte de f:

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0,\ \ pon\ tanto, (0{,}0)$$

$$x^2 - 2x = 0\ ;\ \ x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} por\ tanto\ (2{,}0)$$

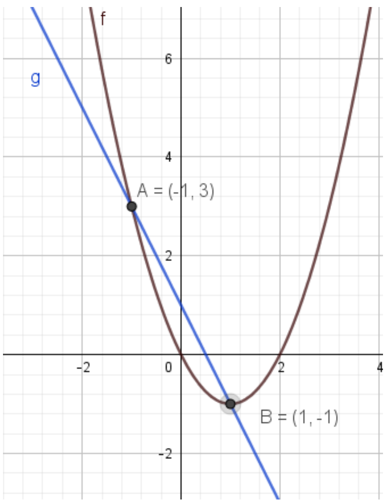
Puntos críticos:

$f'(x) = 2x - 2 = 0\ ; x = 1$ Por tanto, el mínimo se encuentra en $\big(1, f(1)\big) = (1, -1)$.

La segunda función es una recta con pendiente negativa. Para representarla calcularemos los puntos de corte con los ejes:

$$g(0) = 1 - 2 \cdot 0 = 1, \text{por tanto}, (0{,}1)$$

$$1 - 2x = 0\ , x = \frac{1}{2}, por\ tanto, (\frac{1}{2}, 0)$$



Para calcular el área delimitada por ambas gráficas calcularemos los puntos de corte:

$$f(x) = g(x)\ , x^2 - 2x = 1 - 2x\ , x^2 = 1\ , x = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

Como la función g queda por encima de la función f, calcularemos:

$$Área = \int_{-1}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_{-1}^{1} (1 - 2x - x^2 + 2x)dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx$$

Calculamos la primitiva de la función:

$$F(x) = \int 1 - x^2\, dx = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$Área = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\ unidades\ de\ superficie$$

2. Una inmobiliaria está interesada en adquirir unos terrenos que pueden ser representados en un determinado plano como la superficie encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y la recta $g(x) = 2\mathrm{x}$

   a. Halla la representación gráfica simultánea de estas dos funciones.

   b. Si una unidad de área en este plano equivale a 1 km^2 y el precio del km^2 es de 30 millones de euros, ¿qué importe debe pagar la inmobiliaria por esos terrenos?

Solución

a) La función *f* es una parábola, pues es una función polinómica de grado 2. Tiene las ramas hacia abajo, pues su coeficiente principal es negativo, por tanto, en su vértice alcanzará un máximo.

   Calcularemos:

   Puntos de corte de f:

   $$f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 4 = 4,\ pon\ tanto, (0{,}4)$$

   $$-x^2 + 2x + 4 = 0\ ;\ \begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

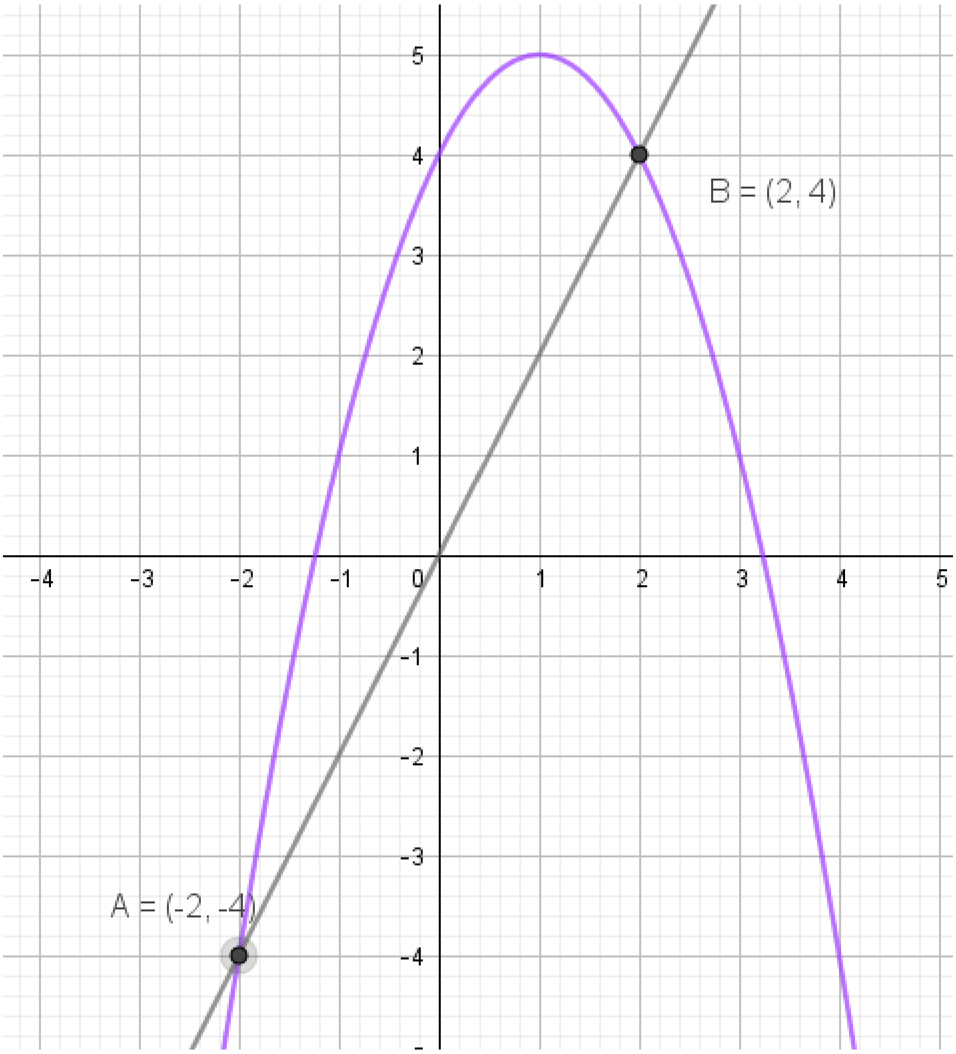
   $$por\ tanto\ \left(1 + \sqrt{5}, 0\right)\ y\ \left(1 - \sqrt{5}, 0\right)$$

Puntos críticos:

$f'(x) = -2x + 2 = 0\,; x = 1$ Por tanto, el máximo se encuentra en $\big(1, f(1)\big) = (1{,}5)$.

La segunda función es una recta con pendiente positiva. Para representarla calcularemos dos puntos (0,0) y (1,2).

La representación queda:



b) Comprobamos que la recta queda por debajo de la parábola, por tanto, calcularemos los puntos de corte para calcular el área utilizando una integral definida:

$$f(x) = g(x);\ -x^2 + 2x + 4 = 2x\,; x = \begin{cases} -2 \\ 2 \end{cases}$$

Por tanto, el área será:

$$Área = \int_{-2}^{2} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx$$

Calcularemos una primitiva

$$F(x) = \int -x^2 + 4\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$$

$$\acute{A}rea = F(2) - F(-2) = -\frac{8}{3} + 8 - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{32}{3}\ unid\ superficie$$

El importe a pagar por tanto es: $\frac{32}{3} \cdot 30 = 320\ millones\ de$ €

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$.

   a. Consideramos *x* e *y* dos variables, y *a* un parámetro. Obtén el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que resulta de plantear $AB - C = D$

   b. Estudia el sistema para los distintos valores de *a*. Encuentra una solución para *a*=*2*.

Solución

a) $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ax \\ y - ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$ por tanto:

$\begin{cases} ax = 6 - ay \\ y - ay = 1 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + ay = 6 \\ (1 - a)y = 1 - a \end{cases}$ adsfadsfa

b) Calcularemos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada y utilizaremos el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 - a \end{pmatrix}\ ;\ |A| = a(1-a)$$

Caso 1

Por tanto, si $a \neq 1\ o\ a \neq 0$ el rango de A es dos, por tanto, el sistema es compatible, siendo determinado por coincidir el número de ecuaciones y de incógnitas con el rango de la matriz.

Caso 2

Si $a = 1$, $|A| = 0, rango(A) = 1,\ A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el rango de la matriz ampliada también es 2 por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible. Es indeterminado pues el número de incógnitas es mayor que el rango de la matriz de coeficientes

Caso 3

Si $a = 0$, $|A| = 0, rango(A) = 1,\ A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

El rango de la matriz ampliada es 2, pues hay un menor de orden 2 distinto de cero formado por la segunda y tercera columna. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible pues el rango de la matriz ampliada es distinta de la matriz de coeficientes.

Para a=2, por el estudio anterior el sistema es compatible determinado, el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ \ -1y = -1 \end{cases}$$

Por tanto la solución es y=1 x=2.