Semana 6

1. En una factoría, se desean producir al menos 4 unidades del producto B. Cada unidad de producto B ocupa un metro cúbico de espacio de almacenamiento, lo mismo que cada unidad de producto A. Tan solo disponemos de un almacén con capacidad de 20 metros cúbicos. Juan se encarga de una fase de la producción y Pedro de otra fase de la producción. Cada unidad de A requiere 4 horas de trabajo de Juan y 2 horas de trabajo de Pedro. Cada unidad de B requiere 1 hora de trabajo de Juan y 3 horas de trabajo de Pedro. Juan debe trabajar al menos 32 horas y Pedro al menos 36 horas. Cada unidad de producto A produce un beneficio de 25 euros y cada unidad de B produce un beneficio de 20 euros. Utilizando técnicas de programación lineal, calcula el número de unidades de producto A y de producto B que permiten obtener mayores beneficios, así como el beneficio máximo que se puede conseguir.

Solución

Se trata de un problema de optimización. Las variables a utilizar serán las siguientes:

$$x \equiv Cantidad\ de\ unidaes\ de\ \text{tipo}\ A;$$

$$y \equiv Cantidad\ de\ unidades\ de\ tipo\ B$$

La función a maximizar (función objetivo) será:

$$F(x, y) = 25x + 20y$$

Las restricciones son: $x \geq 0\,; y \geq 0; y \geq 4; x + y \leq 20; 4x + y \geq 32; 2x + 3y \geq 36$

Vista la región factible, los valores óptimos se encontrarán en los vértices:

$$A = (4,16), B = (6,8); C = (12,4); D = (16,4)$$

Evaluaremos la función objetivo para encontrar el máximo beneficio:

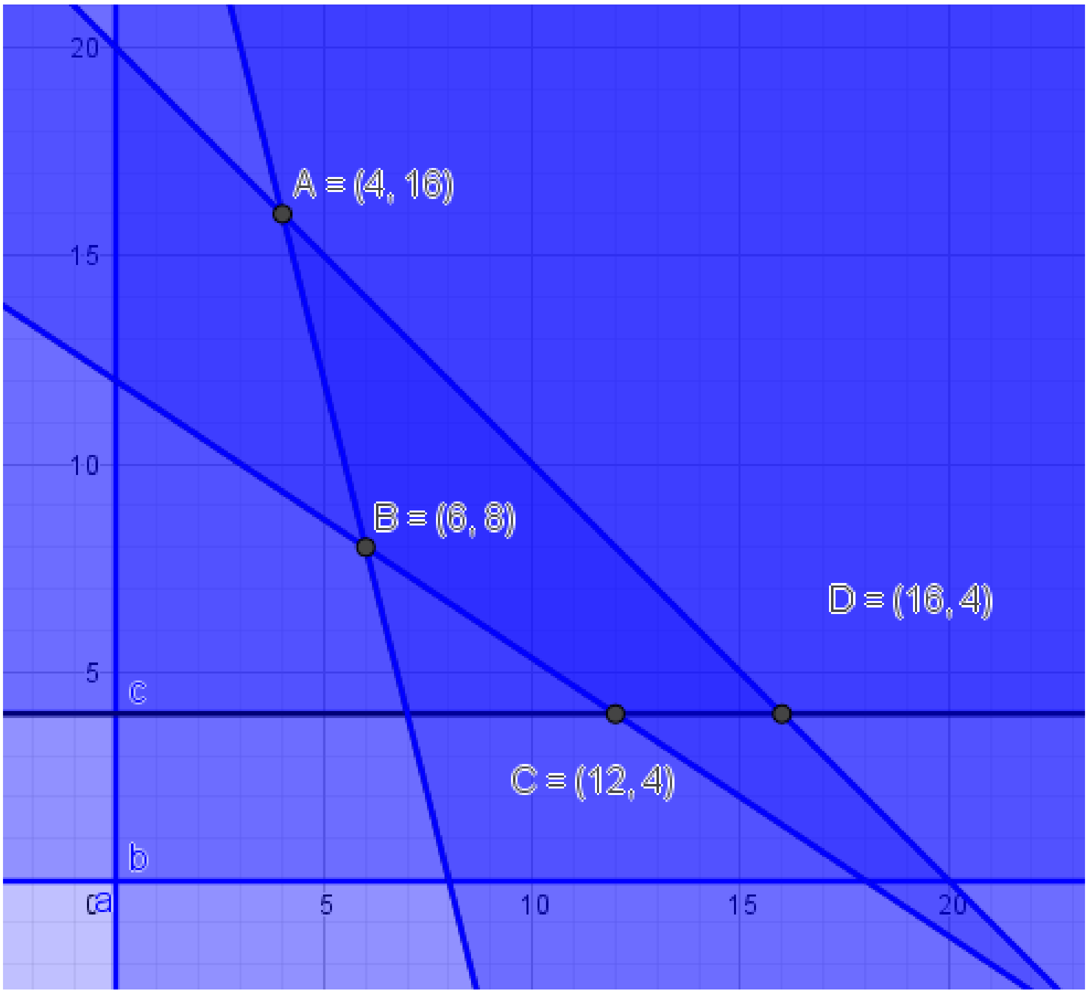
$$F(4,16) = 25 \cdot 4 + 20 \cdot 16 = 420$$

$$F(6,8) = 25 \cdot 6 + 20 \cdot 8 = 310$$

$$F(12,4) = 25 \cdot 12 + 20 \cdot 4 = 380$$

$$F(16,4) = 25 \cdot 16 + 20 \cdot 4 = 480$$

Por tanto, el máximo beneficio es de 480 € alcanzándose al producir 16 unidades del producto A y 4 unidades del producto B.



2. La superficie de media mesa está limitada por las funciones $f(x) = x^2$ y la recta $g\,(x) = 1$, estando x expresado en metros. El barniz se vende en botes para cubrir una superficie de 2 metros cuadrados. ¿Cuántos botes necesitaremos comprar para barnizar toda la mesa y cuántos metros cuadrados podríamos barnizar con el barniz sobrante?

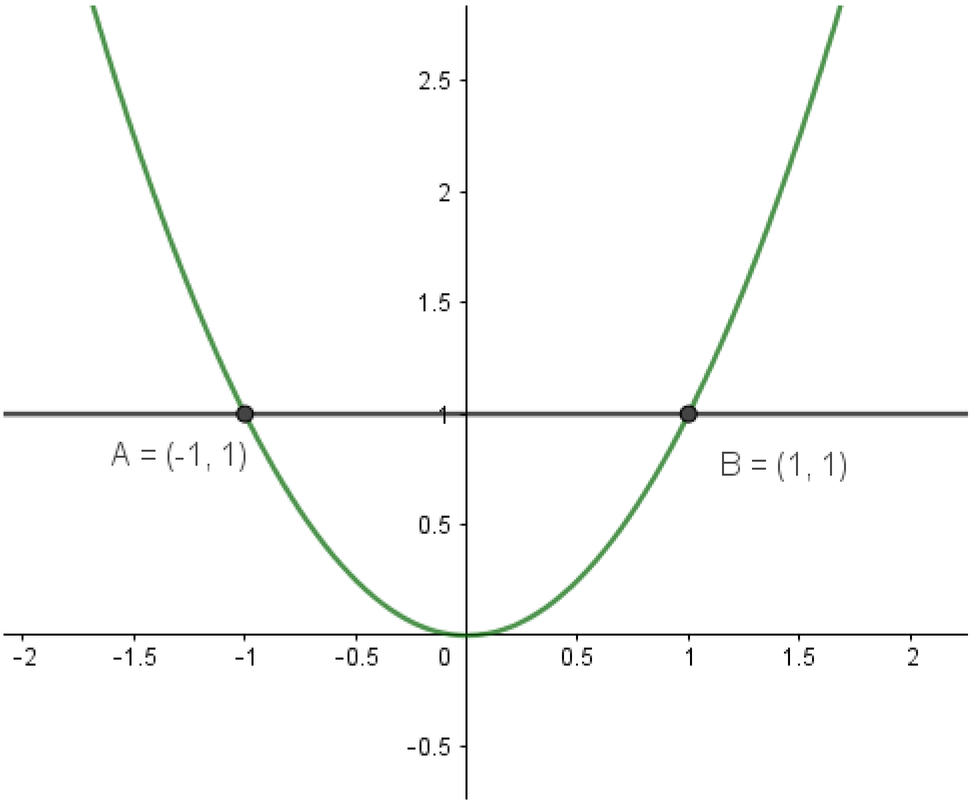
Solución

Representaremos ambas funciones y calcularemos el área encerrada entre éstas.

La primera función es un parábola con las ramas hacia arriba, su vértice se encuentra en el valor de abscisa 0 y el único punto de corte con los ejes es (0,0).

La segunda función es una recta horizontal que pasa por el punto (0,1).

La representación de ambas funciones es:



Los puntos donde se encuentran ambas funciones son (-1,1) y (1,1). Por tanto el área se podrá calcular de la siguiente forma:

$$Área = \int_{-1}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx$$

Calculamos una primitiva:

$$F(x) = \int 1 - x^2\, dx = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$Área = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}m^2$$

Pero el enunciado dice que la superficie es de media mesa, por tanto, habrán de pintarse $\frac{8}{3}m^2$. Dividiendo entre 2 podremos calcular el número de botes que necesitaremos:

$\frac{8}{3}: 2 = \frac{8}{6} = 1 + \frac{2}{6} = 1 + \frac{1}{3}$, por tanto necesitaremos dos botes, sobrando dos tercios de bote.

Por tanto, podremos pintar con $\frac{2}{3}$ de bote $\frac{4}{3}m^2$.

3. Se considera el sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 5y + z = 4 \\ x - y + (a-2)z = 2 \end{cases}$

   Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro a. Halla todas las soluciones para *a=3*.

Solución

Expresaremos el sistema de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$|A| = a - 1 ; a - 1 = 0 ; a = 1$

Por tanto:

Caso 1: $; a \neq 1$

El determinante de la matriz de coeficientes es distintos de cero, por tanto, el rango de la matriz de coeficientes es igual a 3, igual que el rango de la matriz ampliada, por tanto, el sistema es compatible (teorema de Rouche-Frobenius). Cómo el rango coincide con el número de ecuaciones y de incógnitas, es sistema es determinado.

Caso 2: $; a = 1$

El determinante de la matriz de coeficientes es cero, por tanto, su rango será menor que 2. Puesto que el siguiente menor de orden 2 es distinto de cero, la matriz de coeficientes tiene rango 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0$$

Calcularemos el rango de la matriz ampliada:

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Calcularemos el rango utilizando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{cases} -3F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 - F_3 \rightarrow F_3 \end{cases}; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \ F_2 + F_3 \rightarrow F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 2 (hay 2 filas linealmente independientes).

Al ser el rango de la matriz de coeficientes igual al rango de la matriz ampliada, por el teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible. Al ser el rango menor que el número de ecuaciones y de incógnitas, el sistema es indeterminado.

Para a=2 nos encontramos en el caso 1, es decir, el sistema es compatible determinado. Por tanto, resolveremos el sistema utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{1} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{1} = 0$$