# Semana 7

1. Una fábrica de papel tiene almacenados 4000 Kg de pasta de papel normal y 3000 Kg de pasta de papel reciclado. La fábrica produce dos tipos de cajas de cartón. Para el primer tipo se utilizan 0,2 Kg de pasta de papel normal y 0,1 Kg de pasta de papel reciclado, mientras que para la caja del segundo tipo se utilizan 0,2 Kg de pasta de papel normal y 0,3 Kg de pasta de papel reciclado. Los beneficios que la fábrica obtiene por la venta de cada caja son, respectivamente 5 € para el primer tipo y 6 € para el segundo tipo de cajas. Utilizando técnicas de programación lineal, calcula cuántas cajas de cada tipo deben fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto asciende el beneficio máximo obtenido?

## Solución

Se trata de un problema de programación lineal. Identificaremos la variables:

$$x \equiv Cantidad\ de\ cajas\ del\ primer\ tipo$$

$$y \equiv Cantidad\ de\ cajas\ del\ segundo\ tipo$$

La función a maximizar (función objetivo) será:

$$F(x, y) = 5x + 6y$$

Las restricciones son:

$x \geq 0\ ; y \geq 0; 0{,}2x + 0{,}2y \leq 4000; 0{,}1x + 0{,}3y \leq 3000$

La región factible se encuentra representada en la figura, los vértices son los candidatos para maximizar la función objetivo:

$A = (20000{,}0), B = (15000{,}5000); C = (0{,}10000)$

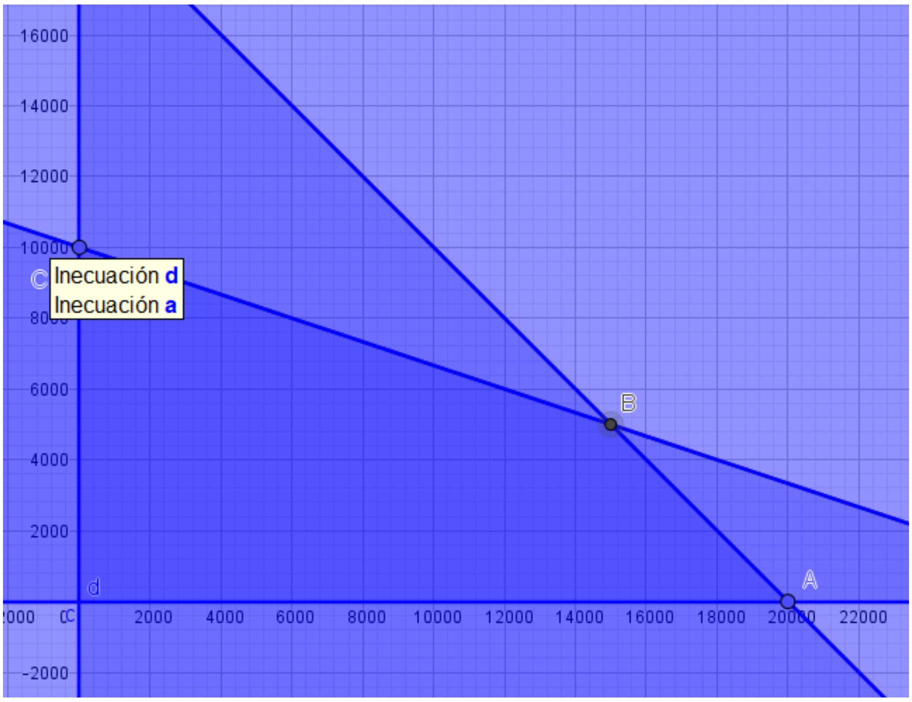
Evaluando la función objetivo en los vértices:

$F(20000{,}0) = 5 \cdot 20000 + 6 \cdot 0 = 100.000$

$F(15000{,}5000) = 5 \cdot 15000 + 6 \cdot 5000 = 105.000$

$F(20000{,}0) = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 10000 = 60.000$

Por tanto, el máximo beneficio se obtiene cuando se fabrican 15000 cajas del primer tipo y 5000 del segundo tipo, obteniéndose un beneficio de 105.000€.




2. Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función: $s(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$ donde t indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana.

   a. A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadena entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche? ¿Qué porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?

   b. Dibuja la gráfica de la función S (t) para t comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.

## Solución

a) Se trata de una función polinómica, por lo que es continua para cualquier valor real. En un intervalo, la función alcanzará un máximo y un mínimo. Calcularemos los puntos críticos para buscar máximos y mínimos relativos, además de calcular los valores en los extremos del intervalo.

$$s'(t) = -3t^2 + 54t - 231$$

Calculamos las raíces:

$-3t^2 + 54t - 231 = 0;$

$$t = \frac{-54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-231)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{54 \pm 12}{6} = \begin{cases} 7 \\ 11 \end{cases}$$

Estudiaremos la monotonía de la función:

$$s'(t) = -3t^2 + 54t - 231 = -3(x-7)(x-11)$$

$Si\ t < 7, \quad s'(t) < 0\,; la\ función\ es\ decreciente$

$Si\ 7 < t < 11,\ s'(t) > 0\,; la\ función\ es\ creciente$

$Si\ t > 11, \quad s'(t) < 0\,;\ la\ función\ es\ decreciente$

Por tanto, en t=7 la función *s* alcanza un mínimo relativo y en t=11 la función *s* alcanza un máximo relativo.

Para calcular el valor mínimo y máximo que alcanza entre las 6 y las 12 evaluaremos la función en los extremos y en los puntos críticos:

$s(6) = 660 - 231 \cdot 6 + 27 \cdot 6^2 - 6^3 = 30$

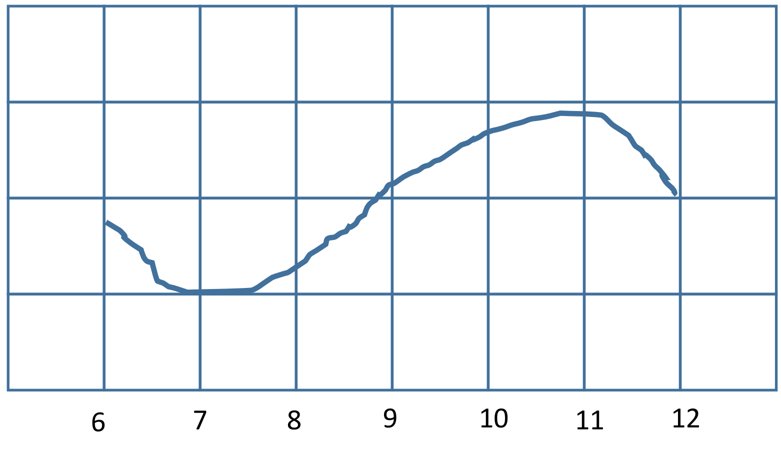
$s(7) = 660 - 231 \cdot 7 + 27 \cdot 7^2 - 7^3 = 23$

$s(11) = 660 - 231 \cdot 11 + 27 \cdot 11^2 - 11^3 = 55$

$s(12) = 660 - 231 \cdot 12 + 27 \cdot 12^2 - 12^3 = 48$

Por tanto, el máximo se alcanza a las 11 horas siendo el porcentaje de espectadores del 55% y el mínimo se alcanza a las 7 horas con el 23%.

b)



3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

   a. Comprueba que $A^2 - 2A + I = O$ donde $I$ es la matriz identidad, $O$ es la matriz con todos sus elementos iguales a cero.

   b. Calcula $A^3$

Solución

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 13 & -12 & 6 \\ 6 & -5 & 3 \\ -12 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$