Semana 8

1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se pide:

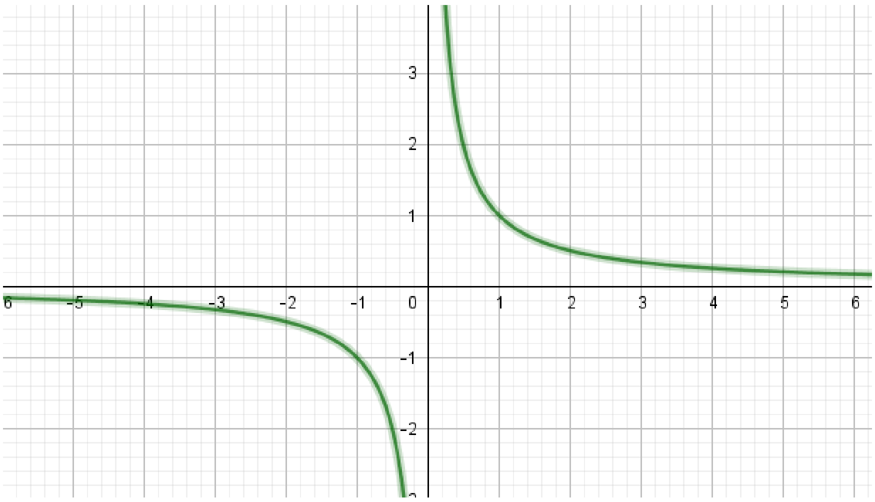
   a. Representa la función f (x).

   b. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva f (x) en el punto $x = \frac{1}{2}$.

   c. Halla el área limitada por la recta y = −4x + 4 y la parte positiva de los ejes de coordenadas.

Solución

a) La función no se encuentra definida en x=0, donde tiene una asíntota vertical. También dispone de la asíntota horizontal en x=0. Es decreciente para todos los valores donde se encuentra definida, pues su derivada es siempre negativa ($f'(x) = -\frac{1}{x^2}$).



b) El valor de f en $x = \frac{1}{2}$, es $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. La pendiente de la recta coincide con el valor de la derivada en el valor de abscisa anterior. Por tanto, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente tiene la forma

$y = -4x + n.$

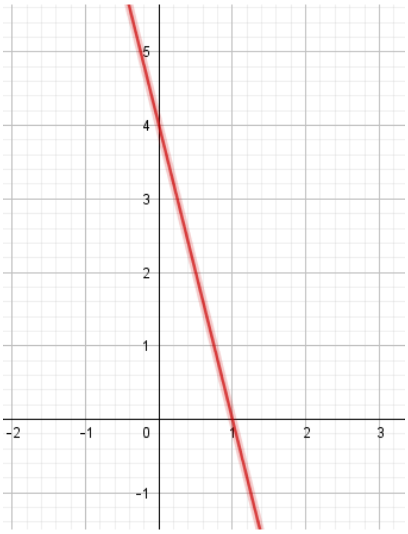
Calcularemos *n* sustituyendo el valor del punto por el que pasa: $2 = -4 \cdot \frac{1}{2} + \mathrm{n}\,; \mathrm{n} = 4$, por tanto, la ecuación de la recta es:

$\mathrm{y} = -4\mathrm{x} + 4.$

c) La recta $\mathrm{y} = -4\mathrm{x} + 4$ corta en los ejes en los puntos $A(0{,}4)\ y\ B(1{,}0)$. La recta forma con los ejes un triángulo rectángulo de base 1 y altura 4, por tanto, su área será de 2 unidades de superficie. Si se prefiere, podemos calcular el área utilizando la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 -4x + 4\,dx = F(1) - F(0) = 2 - 0 = 2\ unidades\ de\ superficie$$

$$F(x) = \int -4x + 4\,dx = -2x^2 + 4x$$



2. Estudia el siguiente sistema en función del parámetro “a”. Resuélvelo para el caso particular a = 3.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + az = 7 \end{cases}$$

Solución

Sea la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$. Calculemos su determinante en función del parámetro para estudiar su rango.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a - 4\,; a - 4 = 0\,; a = 4$$

Caso 1: $a \neq 4$,

> El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, por tanto, el rango de la matriz es 3 y como la matriz ampliada tiene como máximo rango también 3, ambos son iguales. Por el teorema de Rouche-Frobenius, el sistema es compatible. Al coincidir el rango con el número de ecuaciones e incógnitas, el sistema es determinado.

Caso 2: $a = 4$

> El rango de la matriz es menor que 3, en concreto es 2 pues existe un menor de orden 2 que es distinto de cero:
>
> $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$
>
> Calculemos el rango de la matriz ampliada:
>
> $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, como la tercera columna puede obtenerse como combinación lineal de la primera y segunda (sumándolas) y la cuarta columna puede obtenerse como combinación de la segunda y la tercera (sumándolas) el rango de la matriz ampliada es 2, puesto que los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada es el mismo, por el teorema de Rouche-Frobenius es compatible. Como el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es indeterminado.

Por la anterior discusión, para a=3 es sistema es compatible determinado, por lo que podemos utilizar el método de Cramer para resolver el sistema lineal de ecuaciones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-1} = 8$$

3. Un fabricante de plásticos pretende fabricar nuevos productos plásticos mezclando dos compuestos químicos A y B. Cada litro de producto plástico 1 lleva 2/5 partes del compuesto A y 3/5 partes del compuesto B, mientras que el producto plástico 2 lleva una mitad del compuesto A y la otra mitad del compuesto B. Se disponen de 100 litros del compuesto A y 120 litros del compuesto B. Sabemos que al menos necesitamos fabricar 50 litros del producto 1 y que el beneficio obtenido por un litro de producto plástico 1 es de 10 euros, mientras que por un litro del producto plástico 2 el beneficio es de 12 euros. Utilizando técnicas de programación lineal, representa la región factible y calcula el número óptimo de litros que se debe producir de cada producto plástico para conseguir el mayor beneficio posible. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Solución

Se trata de un problema de programación lineal. Identificaremos la variables:

$$x \equiv Cantidad\ de\ producto\ plástico\ tipo\ 1\ (en\ litros)$$

$$y \equiv Cantidad\ de\ producto\ plástico\ tipo\ 2\ (en\ litros)$$

La función a maximizar (función objetivo) será:

$$F(x, y) = 10x + 12y$$

Para calcular las restricciones, crearemos una tabla:

	A	B
1	2/5	3/5
2	1/2	1/2

Las restricciones son:

$\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y \leq 100\,; \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y \leq 120; x \geq 0; y \geq 0$

La región factible se encuentra representada en la figura, los vértices son los candidatos para maximizar la función objetivo:

$A = (200{,}0), B = (100{,}120); C = (0{,}200)$

Evaluando la función objetivo en los vértices:

$$F(200{,}0) = 10 \cdot 200 + 12 \cdot 0 = 2000$$

$$F(100{,}120) = 10 \cdot 100 + 12 \cdot 120 = 2440$$

$$F(0{,}200) = 10 \cdot 0 + 12 \cdot 200 = 2400$$

Por tanto, se alcanza el máximo beneficio de 2400 € cuando se fabrican 100 litros de producto plástico del primer tipo y 120 del segundo.