Semana 9

1. Determina el parámetro a que hace que el valor de la integral definida de $f(x) = 3x^2 - a^2x + a$ entre x = 0 y x = 1 sea máximo. Determina la recta tangente en x = 1 de la función f(x) del apartado anterior, cuando a es igual a 1.

Solución

a) $\int_0^1 3x^2 - a^2x + a\,dx = F(1) - F(0) = 1 - \frac{a^2}{2} + a - 0 = -\frac{a^2}{2} + a + 1$

$$F(x) = \int 3x^2 - a^2x + a\,dx = x^3 - \frac{a^2}{2}x^2 + ax; F(1) = 1 - \frac{a^2}{2} + a$$

Por tanto, habrá de maximizarse la función

$$g(a) = -\frac{a^2}{2} + a + 1$$

Calculamos la derivada: $g'(a) = -a + 1$, por tanto, para a=1 hay un punto crítico, donde la función alcanza un máximo.

b) Calculamos el valor de la función en x=1:

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 3$$

Por tanto, la recta debe pasar por el punto (1,3).

La pendiente de la recta debe coincidir con el valor de la derivada de la función:

$$f'(x) = 6x - 1\,;\; f'(1) = 6 \cdot 1 - 1 = 5$$

Por tanto, la recta tiene la forma $y = 5x + n$. Para calcular *n* sustituimos el punto (1,3).

$$3 = 5 \cdot 1 + n\,; n = -2$$

La recta pedida es $y = 5x - 2$

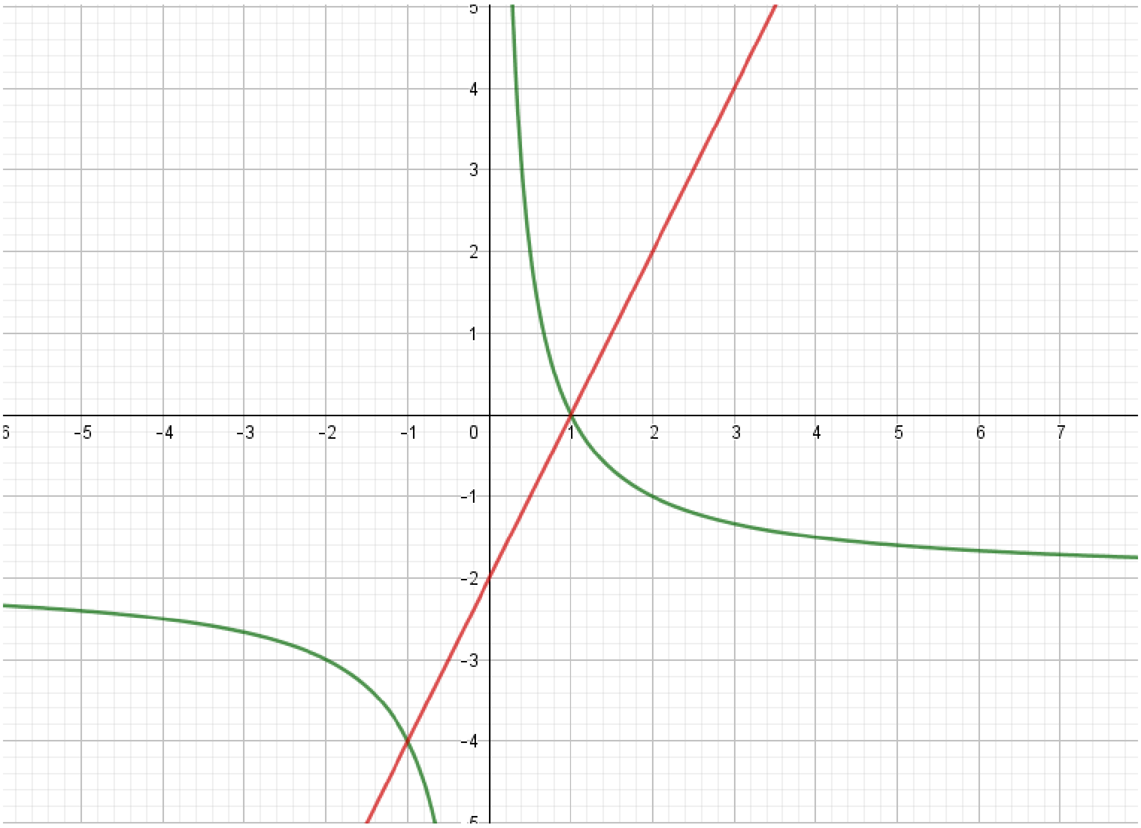
2. Representa simultáneamente las curvas $f(x) = \frac{2}{x} - 2$ y $g(x) = 2x - 2$. Calcula el área encerrada entre las curvas f(x) y g(x).

Solución

La función f no está definida en x=0 (se anula el denominador), tiene una asíntota horizontal en x=-2 (cuando x tiene a infinito el límite es -2) y presenta una asíntota vertical en x=0, siendo una función siempre decreciente.

Por otro lado, la función g es una recta con pendiente positiva.

La representación gráfica de ambas funciones queda:



Puesto que las zonas encerradas entre ambas funciones son simétricas únicamente calcularemos una de ellas y después multiplicaremos por 2:

$\frac{1}{2}\acute{a}rea = \int_0^1 (f-g)dx = \int_0^1 \frac{2}{x} - 2x\,dx = \lim_{a\to 0^+}(F(1)-F(a)) = \infty$ Este resultado se obtiene al no estar definida la función logaritmo en x=0.

$$F(x) = \int \frac{2}{x} - 2x\,dx = 2 \cdot Lnx - x^2$$

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -1 & -8 \leq x < -4 \\ x+2 & -4 \leq x < 2 \\ 8/x & x \geq 2 \end{cases}$. Representa la función, estudia su continuidad y crecimiento.

Solución

Salvo en los valores donde cambia la definición de la función, todas las funciones son continuas, pues la función del primer tramo es una función constante, el segundo tramo es una recta y el tercer tramo es una hipérbola, donde el valor que anula el denominador no se encuentra dentro del intervalo donde se encuentra definida. Estudiemos la continuidad en x=-4 y x=2.

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-} (-1) = -1$$

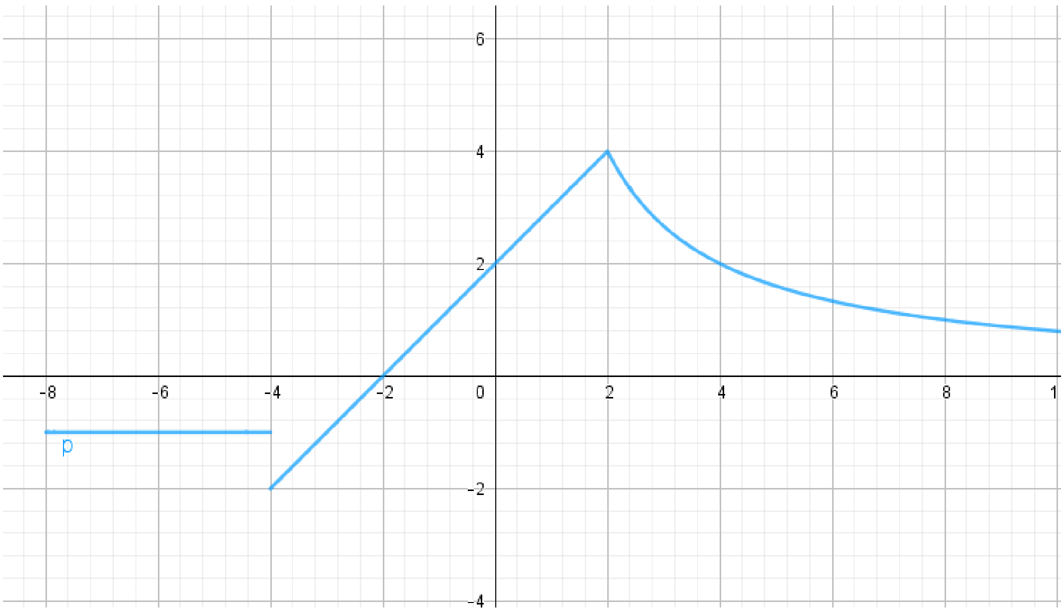
$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} (x+2) = -2$$

Cómo el límite no existe (los límites laterales son distintos) la función no es continua.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (8/x) = 4$$

Cómo los límites laterales existen, coinciden y coinciden con el valor de la función en x=2, la función es continua.



En el intervalo $(-8,-4)$ la función es constante (no crece ni decrece)

En el intervalo $(-2,2)$ la función es creciente (se trata de una recta con pendiente positiva)

En el intervalo $(2,+\infty)$ la función es decreciente pues la derivada de $f'(x) = -8/x^2$ es siempre negativa en dicho intervalo.