1. Un agricultor quiere cultivar una finca de 200 hectáreas únicamente con dos cultivos: trigo y remolacha. Al menos 90 hectáreas deben ser de trigo. Cada hectárea de trigo necesita una dedicación anual del agricultor de 20 horas y proporcionará un beneficio neto anual de 800 euros. Cada hectárea de remolacha requiere 30 horas de dedicación anual pero da un beneficio neto anual de 1000 euros. El agricultor podrá dedicar este año a esos cultivos un total de 4500 horas. Utiliza técnicas de programación lineal para encontrar cómo debe repartir el cultivo en la finca entre trigo y remolacha para que el beneficio neto anual sea máximo. Calcula, además, ese beneficio neto máximo. (**2 puntos**)

   Solución

   Se trata de un problema de programación lineal. Identificaremos las variables:

$$x \equiv Hectáreas\ que\ dedicará\ al\ trigo$$

$$y \equiv Hectáreas\ que\ dedicará\ a\ la\ remolacha$$

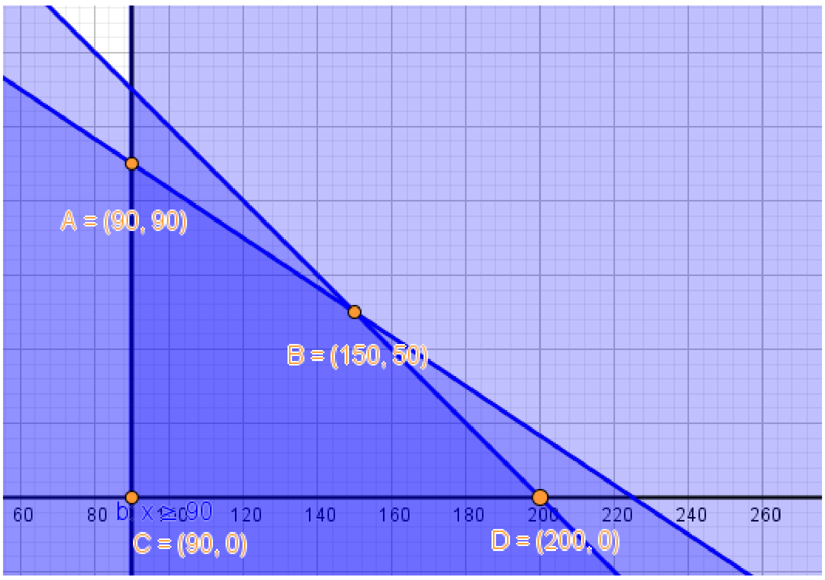
   La función a maximizar (función objetivo) será:

$$F(x,y) = 800x + 1000y$$

   Las restricciones son:

$$x + y \leq 200\ ; x \geq 90; 20x + 30y \leq 4500; x \geq 0; y \geq 0$$

   La región factible es:



Los puntos donde se podría alcanzar el máximo de la función serán:

$$A(90,90); B(150,50); C(90,0); D(200,0)$$

Evaluemos la función objetivo:

$F(90,90) = 800 \cdot 90 + 1000 \cdot 90 = 162000$

$F(150,50) = 800 \cdot 150 + 1000 \cdot 50 = 170000$

$F(90,0) = 800 \cdot 90 + 1000 \cdot 0 = 72000$

$F(200,0) = 800 \cdot 200 + 1000 \cdot 0 = 160000$

Por tanto, se obtiene el máximo beneficio, que es de 170000 euros al cultivar 150 hectáreas de trigo y 50 de remolacha.

2. Se considera el sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 5y + z = 4 \\ x - y + (a-2)z = 2 \end{cases}$

   a. Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro a. (**2 puntos)**

   b. Halla todas las soluciones para *a=3*. (**2 puntos)**

Solución

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix}$.

$$|A| = a - 1\ , por\ tanto\ si\ a = 1, |A| = 0$$

Caso 1, $a \neq 1$

El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, por tanto, el rango de la matriz de coeficientes es 3 al igual que la matriz ampliada. Por el teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible, como el número de ecuaciones coincide con el rango y el número de incógnitas, el sistema es determinado.

Caso 2, $a = 1$

La matriz de coeficientes queda como $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, su rango es 2 pues su determinante es cero y el menor de orden 2 de la matriz $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1$ es distinto de cero.

La matriz ampliada es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ calcularemos su rango por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3F_1 - F_2 \to F_2 \\ F_1 - F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Como puede observarse, las dos últimas filas son iguales, por tanto el rango de la matriz ampliada es igual a 2.

Por tanto, la ser iguales los rangos de la matriz ampliada y la de coeficientes, por el teorema de Rouche-Frobenius, el sistema es compatible. Al ser menor el rango que el número de incógnitas el sistema es indeterminado.

Por la anterior discusión para a=3, el sistema es compatible determinado. Utilizaremos la regla de Cramer para el cálculo de la única solución del sistema:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{2} = 0$$

3. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   a. Calcúlese la matriz $((A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t)^{11}$ (**2 puntos)**

   b. Determínese el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X \cdot A^t = B^t$. Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X. (**2 puntos)**

Solución

a. $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(A \cdot A^t)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$((A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$((A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto, al ser el exponente de la matriz pedida impar, el resultado será $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. $X \cdot A^t = B^t$, la transpuesta de A tiene dimensiones 2x3 y la traspuesta de B tiene dimensiones 1x3, por tanto, la matriz X tiene por dimensiones 1x2. La traspuesta de A no es invertible, pues no es cuadrada (primera condición para que una matriz se pueda invertir).

Realicemos el cálculo:

$(a, b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3{,}2{,}3)$; $\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$ $;por\ tanto\ la\ matriz\ X = (3.3)$