Cálculo integral

1. Calcula la integral indefinida de las siguientes funciones:

a) $\int x^5 dx$

b) $\int 2x^4 + x^2 + 2\, dx$

c) $\int 3e^{2x} dx$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\, dx$

e) $\int \sqrt{x+1}\, dx$

f) $\int 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4dx$

g) $\int \sqrt{x} - 2\, dx$

h) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx$

i) $\int \frac{3x^3-5x^2+3x}{x} dx$

j) $\int (3x+4)^2 dx$

k) $\int \frac{(2x-1)^2}{2x} dx$

l) $\int 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - x^4 dx$

m) $\int \frac{2}{3x+2}\, dx$

n) $\int \frac{Lnx}{x} dx$

o) $\int \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right) dx$

p) $\int \frac{2e^x+e^{2x}}{e^x} dx$

q) $\int (4x+2)(x-1) dx$

r) $\int \frac{1}{x} Ln^3 x dx$

s) $\int e^{x-4} dx$

t) $\int 2xe^{x^2} dx$

u) $\int \frac{dx}{x-1}$

v) $\int e^{-2x+9} dx$

w) $\int \frac{x}{(x^2+3)^5} dx$

x) $\int \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} dx$

y) $\int \frac{Lnx}{x}\, dx$

z) $\int \frac{x^3}{1+x^4}\, dx$

2. Calcula la integral indefinida de las siguientes funciones utilizando uno de los métodos de integración:

a) $\int 2x\sqrt[3]{x^2+5} dx$

b) $\int \frac{2}{3+\sqrt{x}}\, dx$

c) $\int \frac{1+Lnx}{x} dx$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}\, dx$

e) $\int \frac{x}{(5+x^2)^2}\, dx$

f) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^3} dx$

g) $\int \frac{e^x}{1+e^{-4x}} \, dx$

h) $\int (x-1)e^{-x} dx$

i) $\int t^2 Lnt dx$

j) $\int \sqrt{x} Lnx dx$

k) $\int x e^{\frac{x}{2}} dx$

l) $\int x e^x dx$

m) $\int \frac{x}{2^x} dx$

n) $\int \sqrt[3]{x} Lnx dx$

o) $\int Ln(x+1) dx$

p) $\int \frac{Lnx}{x^2} dx$

q) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

r) $\int x Lnx dx$

s) $\int x(Lnx)^2 dx$

t) $\int \frac{x+7}{x^2-x-2} dx$

u) $\int \frac{2x^2-1}{x-2} dx$

v) $\int \frac{-3x-1}{x^3-x} dx$

w) $\int \frac{3x}{x-2} dx$

x) $\int \frac{4}{x^2-3x+2} dx$

y) $\int \frac{-x^3}{x^2+4} dx$

z) $\int \frac{x^3+x+3}{x^2+1} dx$

aa) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx$

bb) $\int \frac{4x^2-3x+1}{x^3-2x^2+x} dx$

3. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int x^3 e^{x^2} dx$

b. $\int \ln(x^2+2) dx$

c. $\int x e^x dx$

d. $\int x^2 \ln x \, dx$

e. $\int x\sqrt{1+x} dx$

f. $\int x^2 \sqrt{1-x} \, dx$

g. $\int x^2 e^{-3x} dx$

h. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

i. $\int \frac{dx}{x^2-4}$

j. $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$

k. $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx$

l. $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} dx$

m. $\int \frac{dx}{x^2-9}$

n. $\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$

o. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4}$

p. $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx$

q. $\int \frac{dx}{\mathrm{x}^3+x}$

r. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}dx$

s. $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}dx$

t. $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

u. $\int \frac{dx}{\mathrm{x}\sqrt{1-\mathrm{x}}}$

v. $\int \frac{dx}{(\mathrm{x}-2)\sqrt{x+2}}$

w. $\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx$

x. $\int \frac{(e^x-2)e^x}{e^x+1}dx$

4. Sea f (x) una función continua en el intervalo [a, b].
   a. Explicar el enunciado de la regla de Barrow y su aplicación.
   b. Sea $f(x)=3x^2-6x$, justificar cuál de las siguientes funciones: $U(x)=3x^3+3x^2$; $V(x)=x^3-3x^2$ es primitiva de la anterior.
   c. Calcular $\int_0^4 f(x)dx$

5. Enunciar la regla de Barrow y comentar su aplicación.

   Sea la función $F(x)=x^4+ax^3+bx$ F (x) = x4 + ax3 + bx. Calcular a y b, sabiendo que el punto (1, 2) pertenece a la gráfica de F (x) y que F (x) es función primitiva de cierta función f (x) cuya integral en el intervalo [1, 2] es igual a 10.

6. Explicar el concepto de función primitiva.

   Sea $f(x)=e^{2x}-2x^2+8$ f (x), justificar si es primitiva de alguna de las siguientes funciones: $g(x)=e^{2x}-4x+8$, $h(x)=2e^{2x}-4x$

   Enunciar la regla de Barrow y aplicarla para calcular: $\int_0^1 h(x)dx$

7. Dada la función: $f(x)=(x+1)(3x-2)$
   a. Calcular una primitiva de f (x)
   b. Justificar que la función: $F(x)=x^3+2x^2+2$ no es primitiva de f (x)

c. Enunciar la regla de Barrow y calcular: $\int_0^1 f(x)dx$

8. ¿Qué se entiende por función primitiva?

   Sea $f(x)=2x^4-x^3+2$. Deducir razonadamente si es primitiva de alguna de las siguientes funciones: $g(x)=8x^3-3x^2$ o $h(x)=4x^3+3x^2+2$. Enunciar la regla de Barrow y calculad $\int_0^2 h(x)dx$

9. Dada la función: $f(x)=4e^{4x}+a$, donde a es una constante, se pide:

   a. Justificar si las siguientes funciones son o no primitivas de f : $F_1(x)=4e^{4x}+ax$ o $F_2(x)=e^{4x}+ax$

   b. Encontrar a, sabiendo que: $\int_0^1 f(x)dx=e^4$

10. Dada la función: $f(x)=ae^{\frac{x}{3}}+\frac{1}{x^2}$ donde a es una constante:

    a. Calcular $\int_1^2 f(x)dx$

    b. Se sabe que F(x) es una primitiva de f. Calcular a si F(1)=0 y F(2)=1.

11. Dada la función: $f(x)=xe^{\frac{x}{2}}$:

    a. Calculad una primitiva de *f(x)*.

    b. Calculad $\int_0^2 f(x)dx$

    c. Si F y G son primitivas de f, y H = F − G, ¿es posible que la derivada de H sea la función x^2?

12. Enuncia la regla de Barrow y aplícala a la función $f(x)=e^x(x+1)$ en el intervalo [0,1].

13. Determinad la función primitiva y el área bajo la curva, en el intervalo [1, e], de la función $f(x)=\ln(x)$.

14. Sea $f(x)=x^2+bx$ donde b es una constante.

    a. Encuentra b, sabiendo que hay una primitiva F de f con F(0)=2 y F(3)=20. Encuentra también la expresión de F .

    b. Dibuja la curva f (x) cuando b=−1 y halla el área delimitada por dicha curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa x=0 y x=2.

15. Dada la función $f(x)=3ax^2+\frac{2a}{x^3}+5$ (x > 0), donde a es una constante,

    a. Encuentra el valor de a sabiendo que cierta función F es una primitiva de f y verifica que F (1) = 6 y F (2) = 42.

b. Dibuja la función f para el valor de a obtenido en el apartado anterior y encuentra también en ese caso el área limitada por la curva y el eje OX entre x = 1 y x = 2.

16. Dada la función $f(x) = x^3 - 27 + axe^{x^2}$, donde a es una constante,

   a. Encuentra una primitiva de f .

   b. Si a = 0, dibuja la función f para x ≥ 0 y encuentra el área limitada por la curva y el eje X entre x = 2 y x = 4.

17. Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ e $y = x$.

18. Calcula el área de la región limitada por la gráfica $y = \frac{1}{x}$, el eje horizontal y la rectas verticales *x = 1* y *x = 2*.

19. Calcula el área de la región finita limitada por el eje horizontal y la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$.

20. Calcula el área de la región encerrada entre las gráfica de $g(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - \frac{3}{2}$

21. Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x + 6$ e $y = x^2$.

22. En un determinado momento, en una granja de pollos aparece una enfermedad que se desarrolla a un ritmo de $r(t) = 3 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$ pollos enfermos por hora. Calcula cuántos pollos habrá enfermos al cabo de 10 horas.

23. Una fábrica compra una maquinaria industrial que genera unos ingresos de $I(x) = 10.000 - 5x^2$ euros mensuales a los x meses de haberla comprado y para que los costes de mantenimiento y funcionamiento son de $C(x) = 1900 + 4x^2$ euros mensuales. Calcula el beneficio neto al cabo de un año.

24. Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = \sqrt{2x}$ e $g(x) = \frac{x^2}{2}$.

25. Dibuja la región limitada por las parábolas $g(x) = x^2 - 4x + 4$ y $h(x) = -x^2 + 2x + 4$ y calcula el área de la región limitada por ambas curvas.

26. Calcula $\int_{-1}^{1} x(x^2 - 1)dx$ y explica mediante un gráfico el significado geométrico del valor obtenido.

27. Considerando la curva de ecuaciones cartesianas $y = x^2 + 8x$. Calcula:

   a. Las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta *y=2x*.

   b. Calcula el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación *y=x+8*.

28. Representa gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones: $f(x) = \frac{5}{4}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20)$ y $h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$ y obtén su área.

29. Sea la función $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$:

a. Representa la función

b. Calcula el área del recinto plano acotado, limitado por la gráfica de la función y el eje *OX*.

30. Calcula el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$ y el eje *OX*.

31. Calcula el valor de *a* (positivo) para que el área de la región plana acotada, limitada por las gráficas de las curvas $f(x) = x^3$ y $g(x) = ax$, sea igual a 4.

32. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ (x-1)^2 & x > 0 \end{cases}$$

a. Estudia la continuidad de la función en x=0

b. Representa la función y calcula el área del recinto limitado por los ejes de coordenadas y la gráfica de la función.

33. Dada la función :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & x < 0 \\ (x-1)^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

a. Estudia la continuidad de la función en x=0

b. Representa la función y calcula el área del recinto limitado por los ejes de coordenadas y la gráfica de la función.