Derivadas (2º BACHILLERATO CCSS)

1. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:
   1) $y = -3$
   2) $y = \frac{3}{4}$
   3) $y = 0$
   4) $y = 2^3$
   5) $y = \sqrt{3}$
   6) $y = 3x$
   7) $y = -2x$
   8) $y = -x$
   9) $y = -\frac{5x}{4}$
   10) $y = -34x$
   11) $y = x^3$
   12) $y = x^2$
   13) $y = x^{2000}$
   14) $y = -2x^3$
   15) $y = 5x^2$
   16) $y = \frac{3}{1000}x^{2000}$
   17) $y = -\frac{5}{6}x^{12}$
   18) $y = -\frac{4x^{12}}{3}$
   19) $y = x^3$
   20) $y = x^3 + x^2$
   21) $y = x^3 + 2$
   22) $y = 5x^3 + 6x^2$
   23) $y = -2 - x$
   24) $y = 5x^3 - 3x^2 + 7$
   25) $y = \sqrt{5}x^3 - 3x^2 + 7$
   26) $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 7$
   27) $y = -5x^7 + x^2 - \sqrt{7}x - 2$
   28) $y = -\frac{4x^2}{3} + 3x$
   29) $y = \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} + \frac{2}{3}$
   30) $y = \frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$
   31) $y = 0{,}1x^3 - 0{,}001x + 10$

2. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:
   1) $y = (1 - x)(2 - x)$
   2) $y = (5x + 3)(2x - 2)$
   3) $y = (3x + 9)(2x - 1)$
   4) $y = (1 - x^2)(2 - 3x)$
   5) $y = 4(1 + x^2)x^3$
   6) $y = (1 + x)^3$
   7) $y = (2x + 4)^3$
   8) $y = (1{,}2x + 0{,}001)^2$
   9) $y = 200x(2x + 1)$
   10) $y = (2x + 4)^3(2x + x^2)$
   11) $y = 2x^3(2x + 5)$
   12) $y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{3}x + 3\right)^2$
   13) $y = (2x - 2)(x - 2)(x - 1)$

3. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:
   1) $y = \frac{3x - 1}{2x + 1}$
   2) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

3) $y = \frac{x-5}{x+5}$
4) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$
5) $y = \frac{x^2-x-1}{x}$
6) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$

4. Calculad el valor de la función derivada en los puntos que se indican:
   1) $y = 3x - 1 \; en \; x = 2$
   2) $y = 3x^2 - 1 \; en \; x = -1$
   3) $y = 3x - 1 \; en \; x = 2$
   4) $y = \frac{5x-1}{3} en \; x = 2$
   5) $y = \frac{5}{x} en \; x = -1$
   6) $y = (x-1)^2 en \; x = -2$
   7) $y = 5x^3 - 3x^2 + 7 \; en \; x = -1$
5. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 3x^2$en el punto de abscisa 1.
6. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 4x^2 - 2x + 4$ en los puntos de abscisa 1, -3 y 2.
7. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = Lnx$ en el punto de abscisa 1.
8. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x + \sqrt{x}$ en el punto de abscisa 4.
9. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 Ln(x+3)$ en el punto de abscisa -2.
10. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = (2x-5)^2$ en el punto de abscisa 2.
11. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{2x+6}$ en el punto de abscisa 5.
12. Obtén las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$ que son paralelas a la recta de ecuación $6x - 2y + 1 = 0$
13. Halla los puntos en los que la función $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ tiene rectas tangentes de pendiente -2. Determina también la ecuación de dichas rectas tangentes.
14. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ calcula:
    1) La función derivada.
    2) La derivada en los puntos de abscisa -1, 0 y 3.
    3) La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa 3.
15. Dada la función $f(x) = (2x+3)(x-1)$ calcula:
    1) La derivada de la función
    2) $f'(2), f'\left(-\frac{3}{2}\right), f'(-2), f'\left(\frac{1}{3}\right)$
    3) La ecuación de la recta tangente en el punto x=-2

16. Estudia si las siguientes funciones son continuas y derivables:
    1) $f(x) = \begin{cases} 4x + 5 \ si \ x < 2 \\ 4x^2 - \frac{3}{2}x \ si \ x \geq 2 \end{cases}$
    2) $f(x) = |x^2 - 4|$
    3) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x \ si \ x < -1 \\ 2x^2 + 8x + 1 \ si \ x \geq -1 \end{cases}$
    4) $f(x) = |x^2 + 1|$
    5) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x \ si \ x < -2 \\ 3x^2 - 2x - 2 \ si \ x \geq -2 \end{cases}$
17. Determina el valor de la expresión a para que la función no sea derivable en el punto x = 3.
$$f(x) = \begin{cases} a & si \ x < 3 \\ x^2 + 3x - 5 & si \ x \geq 3 \end{cases}$$
18. Determina el valor de la expresión b para que la función sea derivable en cualquier número real.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & si \ x < 2 \\ bx + 4 & si \ x \geq 2 \end{cases}$$
19. Determina los puntos de las gráficas de estas funciones cuya tangente es horizontal:
    1) $y = 3x^2 - 15x + 13$
    2) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$
    3) $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$
    4) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$
    5) $y = \frac{x+2}{x-2}$
20. Determina los puntos de las gráficas de estas funciones cuya tangente es horizontal y decide si son máximos o mínimos:
    1) $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$
    2) $y = \frac{x^2}{2-x}$
    3) $y = \frac{x^2+9}{x}$
    4) $y = \frac{x^3}{x^2+4}$
21. Sea la función $f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$
    1) Determina los máximos y mínimos de la función
    2) Calcula $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
    3) Haz un esbozo de la gráfica de la función
22. Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$
    1) Determina los máximos y mínimos de la función
    2) Calcula las ecuaciones de sus asíntotas
    3) Haz un esbozo de la gráfica de la función
23. Sea la función $f(x) = \frac{x}{x-4}$
    1) Determina los máximos y mínimos de la función

2) Calcula las ecuaciones de sus asíntotas
3) Haz un esbozo de la gráfica de la función

24. Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 29$
    1) Determina su dominio y calcula los puntos de corte con los ejes
    2) Calcula las ecuaciones de sus asíntotas
    3) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
    4) Determina los máximos y mínimos de la función.
    5) Haz un esbozo de la gráfica de la función
25. Sea la función $f(x) = \frac{3x-2}{x+4}$
    1) Determina su dominio y calcula los puntos de corte con los ejes
    2) Calcula las ecuaciones de sus asíntotas
    3) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
    4) Determina los máximos y mínimos de la función.
    5) Haz un esbozo de la gráfica de la función
26. Estudia y representa estas funciones racionales:
    1) $f(x) = \frac{5x+1}{x-2}$
    2) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-3}$
    3) $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$
    4) $f(x) = \frac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6}$
    5) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-3x-4}$
    6) $f(x) = \frac{2x}{x^2+x-6}$
27. Halla los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$
28. Averigua razonadamente dónde alcanzan el máximo absoluto las siguientes funciones:
    1) $f(x) = 2x + 4 \; si \; 0 \leq x \leq 4$
    2) $f(x) = x^2 - 4 \; si \; 4 < x \leq 8$
29. Calcula las dimensiones de una ventana rectangular de 6 metros de perímetro para que tenga la máxima superficie posible y, así, produzca la máxima luminosidad.
30. Halla dos números cuya suma sea 20 sabiendo que su producto es máximo.
31. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 8 m2. El metro lineal de tramos horizontales cuesta 2,50 €, mientras que el metro de tramos verticales cuesta 5€ . Determina las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo, y halla el precio de dicho marco.
32. Nos dicen que la función $f(t) = t - 2$, es derivada de la inflación en función del tiempo en cierto país, cuando $0 < t \leq 5$.
    1) Determina el valor de t para el que la inflación alcanza el valor mínimo. ¿Cuál es el valor del mínimo?
    2) Determina cuándo es máxima la inflación y cuál es su valor.
33. Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo de fresas depende del precio de venta, de acuerdo con la siguiente función:

$$f(x) = 2x - x^2 - 0{,}84$$

Siendo f(x) el beneficio por kilogramo, expresado en euros, y x el precio de cada kilogramo también en euros.

1) ¿Entre qué precios por kilogramo se producen beneficios para el almacenista?
2) Si tiene en el almacén 10.000 kilos de fresas, ¿cuál será el beneficio total máximo que podrá obtener?.

34. Una fábrica de televisores vende cada aparato a 300 €. Los gastos derivados de fabricar x televisores son $D(x) = 200x + x^2, donde\ 0 \leq x \leq 80$.
    1) Suponiendo que se venden todos los televisores que se fabrican, halla la función de los beneficios que se obtienen después de fabricar y vender x televisores.
    2) Determina el número de aparatos que conviene fabricar para obtener el beneficio máximo, así como dicho beneficio máximo.
35. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.
36. Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Disponemos de 192 m2 de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de ésta de manera que su capacidad sea máxima.
37. Estudia la curvatura y halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

2) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$

3) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

4) $f(x) = e^{1-x^2}$

5) $f(x) = \frac{x^2(1-x)}{x^2-1}$

6) $f(x) = \frac{lnx}{x}$

7) $f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$

8) $f(x) = \frac{1}{x} + lnx$

9) $f(x) = x^3(x+2)$

10) $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$

38. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si, x \leq 1 \\ x - 1 & si, x > 1 \end{cases}$$

39. Se sabe que la función $f: [0,5] \to \mathbb{R}$ dada por :

$$f(x) = \begin{cases} ax + x^2 & si, 0 \leq x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & si, 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Es derivable en el intervalo (0,5) y verifica que f(0) = f(5). ¿Cuánto valen a, b y c?.

40. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si, x < 1 \\ cx & si, x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula a ,b y c para que la función sea derivable en x = 1, sabiendo que f(0) = f(4).

41. Calcúlense p y q de modo que la curva $y = x^2 + px + q$ contenga al punto (-2, 1) y presente un mínimo en x = - 3.
42. El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función: $\mathrm{f(x)} = \frac{15+t^2}{(t+1)^2}$ donde t se mide en años transcurridos desde t = 0. Calcúlese:
    1) La población inicial.
    2) El año en que se alcanzará la mínima población. ¿Cuál será el tamaño de ésta?
    3) ¿Cuál será el tamaño de ésta a largo plazo?
43. Se considera la función $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & \mathrm{si}\ x \leq 2 \\ \frac{3x^2-2x}{x+2} & \mathrm{si}\ x > 2 \end{cases}$.
    1) Estudiar la continuidad en x= 2.
    2) Calculad la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto x = 3.
44. Sea la función dependiente de los parámetros a y b:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} -2x - a & \mathrm{si}\ x \leq 0 \\ x - 1 & \mathrm{si}\ 0 < x \leq 2 \\ bx - 5 & \mathrm{si}\ x > 2 \end{cases}$$

    1) Calculad los valores de a y b para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales.
    2) Representad gráficamente la función para los valores a=0 y b=3.
45. Dada la función $\mathrm{f(x)} = 3 - x - \frac{2}{x}$, calcula el dominio de la función y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Tiene algún máximo o mínimo?.
    1) El número total de bacterias (en miles) presentes en un cultivo después de t horas viene dado por $\mathrm{n(t)} = 2t(t-10)^2 + 50$
    2) Calculad la derivada de la función
    3) Durante las 10 primeras horas, en que instante se produce la máxima población y la mínima población.
    4) Representad la función para el intervalo [0, 10].