DETERMINANTES

Aplicaciones: Regla de Cramer, estudio de sistemas y cálculo de la matriz inversa.

Determinante de una matriz de orden 2

El determinante de una matriz cuadrada de orden 2 es un número que se calcula de la siguiente forma:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Para indicar el determinante se limitará el nombre de la matriz entre barras, o se utilizará el literal ***det***.

Ejemplo:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$$

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 1 = 2 + 3 = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 4 \cdot 6 = -24$$

Menores y adjuntos (cofactores)

En una matriz cuadrada ***A*** el menor $\boldsymbol{M_{ij}}$, del elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$ es el determinante de la matriz obtenida a partir de la matriz ***A*** eliminando la fila ***i*** y la columna ***j***.

El adjunto o cofactor correspondiente al elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$ es:

$$\boldsymbol{C_{ij}=(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

Ejemplo:

Para la matriz cuadrada de orden 3, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ el **menor** para el elemento de la **fila 2**, **columna 3** es: $\boldsymbol{M_{23}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8$

El elemento **adjunto** es $\boldsymbol{C_{23}} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = 8$

Ejemplo

Vamos a encontrar algunos menores y adjuntos para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 12 = 20;\ C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 20$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10;\ C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5;\ C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8;\ C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = 8$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6;\ C_{32} = (-1)^{2+3} \cdot M_{32} = -6$$

Determinante de una matriz de orden mayor que 2

El determinante de una matriz cuadrada de orden mayor que 2 se puede calcular de la siguiente forma:

1. Seleccionamos una fila o columna
2. Calculamos los adjuntos correspondientes a los elementos de la fila o columna seleccionada anteriormente.
3. Multiplicamos el elemento de la fila o columna por el correspondiente adjunto y sumamos el resultado.

$$|A| = a_{k1} \cdot A_{k1} + a_{k2} \cdot A_{k2} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{kn}$$

Supuesto que A es una matriz cuadrada de orden 2, se ha seleccionado la fila ***k*** para el desarrollo del determinante, siendo A_{kn} el adjunto correspondiente.

Ejemplo

Cálculo del determinante de $\det(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Seleccionaremos para el desarrollo la primera columna, pues tiene un elemento que es 0, lo que nos ahorra cálculos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + (-5) = -1$$

El valor del determinante no varía si elegimos otra fila o columna para su desarrollo (en esta ocasión desarrollamos por la segunda fila)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 1 - 2 \cdot 0 = -1$$

Ejemplo

Cálculo del determinante de $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

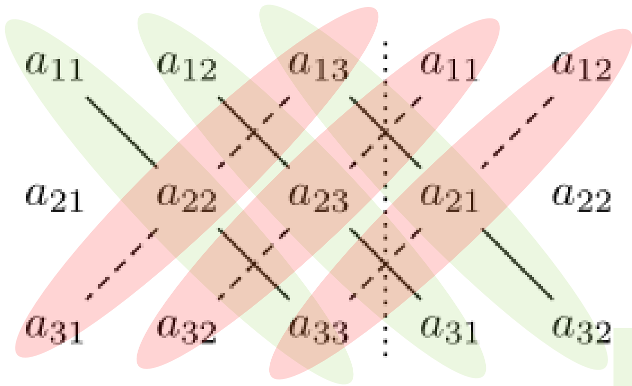
Seleccionaremos para el desarrollo la primera columna, pues tiene dos elementos que son 0, lo que nos ahorra cálculos.

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\left(- \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) +$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -6$$

Regla de Sarrus

La regla de Sarrus permite calcular el determinante de una matriz de orden 3. Siguiendo el siguiente esquema es posible resolver el determinante:



Valores que se multiplican y se restan

Valores que se multiplican y se suman

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ejemplo, regla de Sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot (-2)$$
$$-(-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 0 \cdot 0 = -4 - 1 + 4 = -1$$

Duplicamos las dos primeras columnas

$$\begin{matrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{matrix}$$

Multiplicamos las “diagonales” sumándolas o restándolas según la regla

Propiedades de los determinantes I

1. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.
2. Si en un determinante se cambian entre sí dos filas o columnas, el signo de su valor cambia.
3. Un determinante con dos filas o columnas iguales tiene valor 0.
4. Si un determinante tiene todos los elementos de una fila o columna 0, vale 0.
5. Multiplicar un determinante por un número real es equivalente a multiplicar cualquiera de sus filas o columnas por dicho número.

Propiedades de los determinantes II

6. Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en la suma de dos determinantes.

7. Si los elementos de una fila o columna son combinación lineal de las otras, entonces, el determinante vale 0.

8. Si a los elementos de una fila o columnas se le suman los elementos de otra fila o columna multiplicados previamente por un número real el valor del determinante no varia.

9. El determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes de cada una de ellas.

Aplicación de las propiedades I

El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 \qquad |A^t| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

Si en un determinante se cambian entre sí dos filas o columnas, el signo de su valor cambia.

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1; \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1$$

Un determinante con dos filas o columnas iguales tiene valor 0.

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$$

Aplicación de las propiedades II

Si un determinante tiene todos los elementos de una fila o columna 0, vale 0.

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

Multiplicar un determinante por un número real es equivalente a multiplicar cualquiera de sus filas o columnas por dicho número.

$$3|A| = 3\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(-3+4) = 3; \begin{vmatrix} 3\cdot(-3) & -4 \\ 3\cdot\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 12 = 3$$

Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en la suma de dos determinantes.

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-1 & -4 \\ 0+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 4 = 1$$

Aplicación de las propiedades III

Si los elementos de una fila o columna son combinación lineal de las otras, entonces, el determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

Si a los elementos de una fila o columnas se le suman los elementos de otra fila o columna multiplicados previamente por un número real el valor del determinante no varia.

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7; \begin{vmatrix} -3 & 1-6 \\ 1 & 2+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7$$

El determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes de cada una de ellas.

$$|A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-2) = 14; |A \cdot B| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$$

Cálculo del rango por determinantes

El rango de una matriz es el número de filas o columnas que son linealmente independientes.

Podemos calcular el rango de una matriz utilizando menores, siendo el rango el orden del mayor menor no nulo.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Seleccionando el menor compuesto por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$ por tanto el rango de la matriz es 3

Ejemplo: cálculo del rango de una matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz puede ser a lo más de 3 (menor número de filas o columnas)

Si observamos las columnas 3 y 4 son combinación lineal de las dos primeras. Por tanto, el rango de la matriz será 2 (número máximo de columnas linealmente independientes)

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$ por tanto el rango de la matriz es 2

Cualquier menor de orden 3 será igual a 0 pues sus columnas son combinación lineal.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-6) + 2(6-4) = 0$$

REGLA DE CRAMER

Aplicación de los determinantes

El método de Cramer

Un sistema lineal que tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero puede resolverse utilizando el método de Cramer.

La expresión para resolver el sistema lineal es la siguiente:

$$AX = B; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \ldots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \forall j \epsilon \{1, \ldots . n\}$$

Se sustituye la columna j por la matriz de términos independientes para obtener el valor de cada variable

Ejemplo (método de Cramer)

Sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y + z = 8 \\ x + y + z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

Representación del sistema en forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$$

Términos independientes

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{16}{8} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{24}{8} = 3$$

TEOREMA DE ROCHÉ FRÖBENIUS

Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Este teorema permite discutir un sistema, es decir, clasificarlo sin resolverlo.

Nota.- La matriz ampliada se refiere a la matriz que se obtiene a partir de la matriz de coeficientes, añadiendo como última columna la matriz de términos independientes. Por tanto, el rango de la matriz ampliada siempre será mayor o igual que el rango de la matriz ampliada.

Ejemplo I: estudio de un sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ -x + 3y - 2\,z \;\; = 3 \\ 5x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot (-13) = -34 \neq 0$$

Puesto que el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, el rango de la matriz es 3 y por tanto el rango de la matriz ampliada es también 3, lo que indica que este sistema es compatible.

Como el rango coincide con el número de incógnitas es un sistema compatible determinado.

Ejemplo II: estudio de un sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 7 \\ -x + 2y + 4\,z \quad = 1 \\ 3x - 5y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 44 - 39 - 5 = 0$$

El rango de la matriz de coeficientes es dos (hay un menor de orden 2 distinto de cero). Calculamos el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 18 - 15 - 7 = -4 \neq 0$$

Hemos encontrado un menor de orden 3 de la matriz ampliada distinto de cero, por tanto el rango es 3 y al no coincidir con el rango de la matriz de coeficientes el sistema es incompatible.

Ejemplo III: estudio de un sistema

$$\begin{cases} -2x + 4y - 3z = 3 \\ 2x - 3y - 2\,z \;\; = 1 \\ 2x - 2y - 7z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -34 + 40 - 6 = 0$$

El rango de la matriz de coeficientes es dos (hay un menor de orden 2 distinto de cero). Calculamos el rango de la matriz ampliada, utilizaremos el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -10 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz ampliada es 2 pues la tercera fila se puede obtener como combinación lineal de las dos primeras, por tanto el sistema es compatible (indeterminado pues el número de incógnitas es 3 mientras que 2 es el rango)

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Definición y fórmula

La matriz inversa de una matriz cuadrada A, es otra matriz que notaremos por A^{-1} que verifica que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (matriz identidad).

Fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n-1\,1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n-1\,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{n-1\,n} & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\left(adj(A)\right)^{t}$$

Es decir, es la traspuesta de la matriz adjunta dividida por el determinante de A. Para que la matriz inversa de una matriz exista es condición necesaria y suficiente que el determinante de la matriz sea distinto de cero.

Ejemplo: cálculo de la matriz inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 + 1 = 1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -3;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 5;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

Cálculo de los adjuntos

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$