1. Dada la función $f(x)=\frac{8x^2+8x+10}{4x+2}$. Calculad:

   a. Dominio de f. ¿Qué valores tienen por imagen el valor 5?

   b. Calcula todas sus asíntotas razonando la respuesta.

   c. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Solución

La función no está definida cuando el denominador es cero, por tanto:

$$4x+2=0\,;4x=-2\,;\ x=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\,;Dom(f)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Los valores que tienen por imagen 5 se calculan igualando a 5 la función y resolviendo la ecuación:

$$\frac{8x^2+8x+10}{4x+2}=5\,;8x^2+8x+10=20x+10\,;8x^2-12x=0\,;x(8x-12)=0$$

Por tanto, resolviendo la ecuación de segundo grado incompleta:

$x=0\,;8x-12=0\,;8x=12\,;x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

Para calcular las asíntotas verticales calcularemos el límite en $x=-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{8x^2+8x+10}{4x+2}=\frac{8\cdot\frac{1}{4}-\frac{8}{2}+10}{-\frac{4}{2}+2}=\frac{8}{0}=\infty$ por tanto, hay una asíntota vertical en $x=-\frac{1}{2}$

Para calcular las asíntotas horizontales, calcularemos el límite de la función cuando x tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+8x+10}{4x+2}=\infty$$

$pues\ el\ grado\ del\ polinomio\ del\ numerador\ es\ mayor\ que\ el\ grado\ del\ polinomio\ del\ denominador$

Vamos a calcular las asíntotas oblicuas recordemos que tienen la forma y=mx+n.

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x^2+8x+10}{4x+2}:x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x^2+8x+10}{4x^2+2x}\right)=\frac{8}{4}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x^2+8x+10}{4x+2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x^2+8x+10-8x^2-4x}{4x+2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+10}{4x+2}\right)=1$$

Por tanto, la asíntota oblicua es y=2x+1.

Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento calcularemos los puntos críticos igualando a cero la derivada y calcularemos el signo de la derivada en un entorno:

$$f'(x)=\frac{(16x+8)(4x+2)-4(8x^2+8x+10)}{(4x+2)^2}$$

$$\frac{(16x+8)(4x+2)-4(8x^2+8x+10)}{(4x+2)^2}=0\,;(16x+8)(4x+2)-4(8x^2+8x+10)=0$$

$$64x^2+32x+32x+16-32x^2-32x-40=0;\ 32x^2+32x-24=0; x=\begin{cases}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\end{cases}$$

Ahora estudiamos el signo de la función derivada en un entorno de los puntos obtenidos (incorporaremos el punto que eliminamos del dominio de la función):

	$x<-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$	$x>\frac{1}{2}$
Signo de f'	Positiva	Negativa	Negativa	Positiva
Monotonía de f	Creciente	Decreciente	Creciente	Decreciente

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty,-\frac{3}{2})\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

La función es decreciente en $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

2. Sea la función: $f(x)=\begin{cases}1\,,\ \ 0\le x<1\\ x^2+a\,,\ \ 1\le x<2\\ b(-x+4)\,,\ \ 2\le x\le 4\end{cases}$

¿Para qué valores de a y b es continua la función?

Solución

Esta función es continua en todo su dominio, salvo para los valores donde se produce un salto en su definición, pues cada uno de sus trozos es un polinomio y todas las funciones polinómicas son continuas. Por tanto, calcularemos los límites laterales en 1 y 2:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1\,;\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 + a\ = 1 + a$$

Para que la función sea continua en x=1, $1 + a = 1\,; a = 0$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 + a = 4 + a\,;\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} b(-x + 4)\ = 2b$$

Para que la función sea continua en x=2:

$$4 + a = 2b\,; como\ a = 0\,;\ b = 2$$

3. Se considera la función $f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2}$

   a. Determina el valor de a para que la tangente en x=0 sea paralela a la recta $y = x + 3$

   b. Para a=1, determina las asíntotas de la función y esboza una representación gráfica para ella.

Solución

Si la recta tangente en x=0 debe ser paralela a la recta y=x+3, entonces debe ocurrir que sus pendientes deben ser iguales, por tanto, la pendiente de la recta que buscamos vale 1. Como la pendiente de la recta tangente debe coincidir con el valor de la derivada de la función en x=0, f'(0)=1.

Calculemos la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{a(x-1)^2 - 2a(x-1)(x+1)}{(x-1)^4}\ ;\ f'(0) =\ 3a$$

$$igualando:\ 3a = 1\,; a = \frac{1}{3}$$

La función queda $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$

Asíntotas verticales:

Podemos observar como el denominador se anula para x=1, por tanto, calcularemos el límite:

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0} = \infty$ por tanto, x=1 es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

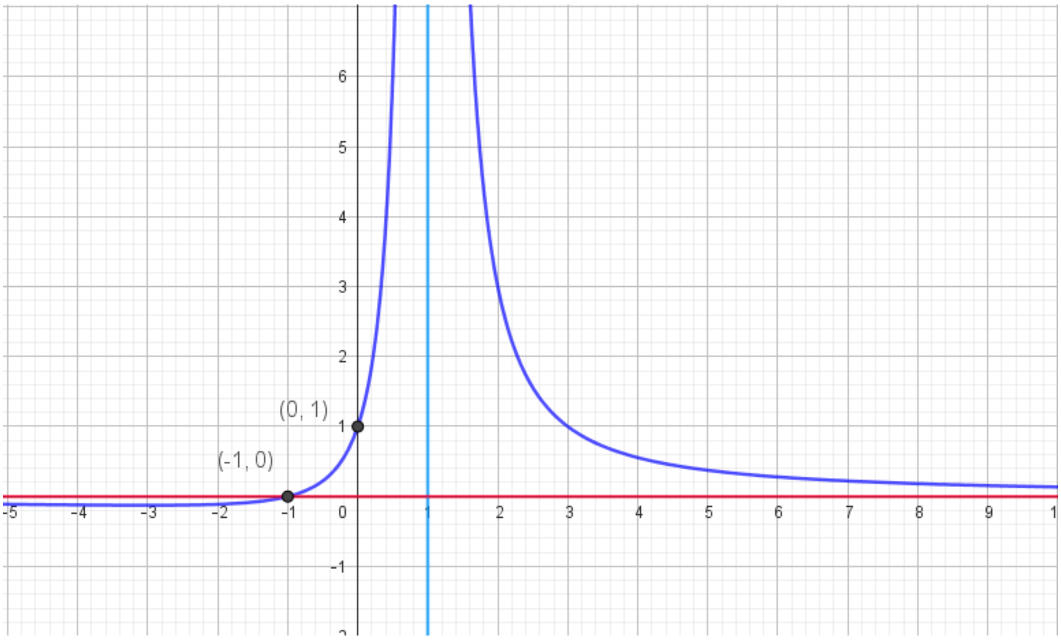
Calcularemos el límite cuando x tiene a infinito:

$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{(x-1)^2} = 0$ pues el grado del polinomio del denominador es mayor que el grado del polinomio denominador.

Por tanto, y=0 es una asíntota horizontal.

Los puntos de corte con los ejes son (0,1) y (-1,0)

La representación gráfica es como sigue (nótese que la función es negativa para todos los valores de x menores que -1).



4. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$
   b. $f(x) = \frac{2x^3-3x}{x^2-1}$

Solución

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2(1+e^x)e^x e^x}{\left((1+e^x)^2\right)^2} = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2(1+e^x)e^{2x}}{(1+e^x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(6x^2-3)(x^2-1) - 2x(2x^3-3x)}{(x^2-1)^2}$$

1. Dada la función $f(x) = \frac{4x^2+4x+5}{2x+1}$. Calculad:

   a. Dominio de f. ¿Qué valores tienen por imagen el valor 5?

   b. Calcula todas sus asíntotas razonando la respuesta.

   c. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Solución

Es idéntico al ejercicio 1

2. Sean a y b dos parámetros reales. Consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} -ax^3 + 6bx^2 - 3x, & x < -1 \\ ax + b, & -1 \le x \le 1 \\ -ax^3 - 4bx^2 - 3x, & x > 1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a y b es continua la función?

Solución

Calcularemos los límites laterales de la función en x=-1 y x=1:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = a + 6b + 3\,;\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\,a + b$$

Para que la función sea continua deben coincidir:

$$a + 6b + 3 = -a + b\,; 2a + 5b = -3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b\,;\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\,a - 4b - 3$$

Para que la función sea continua deben coincidir:

$$a + b = -a - 4b - 3\,; 2a + 5b = -3$$

Por tanto, para cualquier par de valores de a y b que cumplan la anterior ecuación la función será continua.

3. Consideramos la función $f(x) = \frac{x(x+a)}{x^2-4}$, donde ***a*** es un cierto parámetro real:

   a. Determina el valor de ***a*** si la recta tangente en x=0 es paralela a la recta $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{x}}{4} + 2023$. Dar la ecuación de la recta tangente en x=0 para el valor obtenido de ***a***.

   b. Tomando en ***a=2***, determinar las asíntotas de f.

Solución

El valor de la derivada de la función en x=0 debe ser igual a la pendiente de la recta, es decir, $\frac{1}{4}$:

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2-4) - 2x(x^2+ax)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-4a}{16} \ ; \ \frac{-4a}{16} = \frac{1}{4} \ ; a = -1$$

La recta tangente para por $\left(0, f(0)\right) = (0,0)$. Por tanto, la recta buscada es:

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{1}{4} \ ; y = \frac{1}{4}x$$

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{x^2-4}$$

Las asíntotas verticales las buscaremos en x= -2 y x=2 que es donde se anula el denominador:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{0}{0} \ se\ trata\ de\ una\ indeterminación\ ; \ \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x}{x-2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, para x=-2 no hay asíntota

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{8}{0} = \infty \ ; por\ tanto\ hay\ una\ asíntota\ vertical\ x = 2$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2-4} = 1$$

Por tanto, y=1 es una asíntota horizontal para la función.

4. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = \frac{(1+e^x)^2}{e^x}$
   b. $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^3-3x}$

Solución

$$f'(x) = \frac{2(1+e^x)e^x e^x - e^x(1+e^x)^2}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(2x^3-3x) - (x^2-1)(6x-3)}{(2x^3-3x)^2}$$