1. Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos.
   Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

   Solución

   Definimos las variables de decisión:

   $\boldsymbol{x \equiv \text{Número de furgonetas de tipo } A}$

   $\boldsymbol{y \equiv \text{Número de furgonetas de tipo } B}$

   La función objetivo a minimizar es:

   $\boldsymbol{F(x,y) \equiv 240x + 400y}$

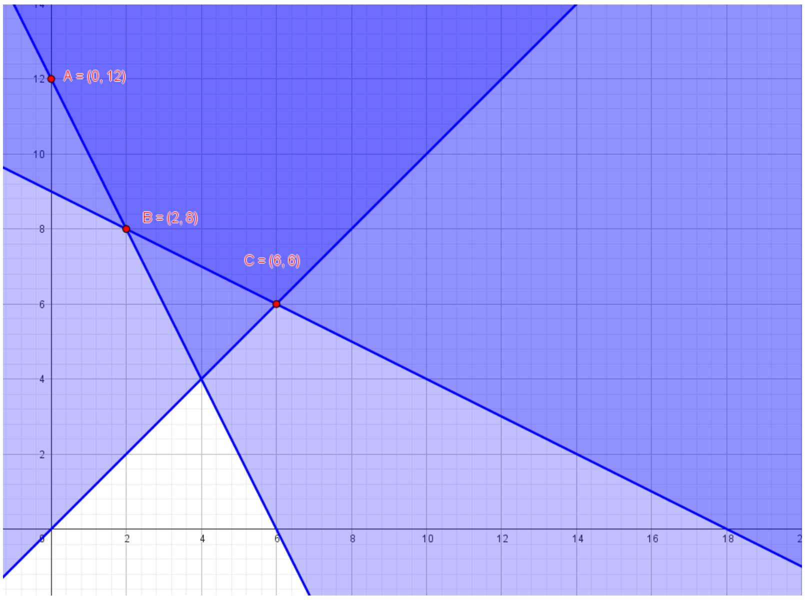
   El conjunto de restricciones:

   $4x + 2y \geq 24$ Relativa a los perros

   $3x + 6y \geq 54$ Relativa a los gatos

   $y \geq x$

   Incluimos las restricciones $\boldsymbol{x \geq 0}$ $\boldsymbol{y \geq 0}$



   El valor óptimo se encuentra en los vértices de la frontera de la región factible, es decir en los puntos A(0,12), B(2,8) y C(6,6).

Evaluamos la función objetivo:
$F(0,12) \equiv 240 \cdot 18 + 400 \cdot 0 = 4320$
$F(2,8) \equiv 240 \cdot 2 + 400 \cdot 8 = 3680$
$F(6,6) \equiv 240 \cdot 6 + 400 \cdot 6 = 3840$
Por tanto, el valor mínimo es de 3680 euros y se alcanza cuando se alquilan 2 furgonetas de tipo A y 8 de tipo B.

2. Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C.

Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

Solución

En primer lugar, definimos las variables que vamos a utilizar:

$a \equiv cantidad\ en\ euros\ que\ se\ invertieron\ en\ el\ fondo\ A$
$b \equiv cantidad\ en\ euros\ que\ se\ invertieron\ en\ el\ fondo\ B$
$c \equiv cantidad\ en\ euros\ que\ se\ invertieron\ en\ el\ fondo\ C$
Del texto: "Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C"
$a + b + c = 10000$
Del texto: "El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros."
$0,05a + 0,1b + 0,02c = 497$
Esta ecuación la transformamos en otra equivalente para eliminar decimales:
$5a + 10b + 2c = 49700$
Del texto: "la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C."
$a = 3(b + c)$, es decir, $a - 3b - 3c = 0$
Resolvemos utilizando el método de Gauss:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 5 & 10 & 2 & 49700 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5F_1 - F_2 \to F_2 \\ F_1 - F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & -5 & 3 & 300 \\ 0 & 4 & 4 & 10000 \end{pmatrix} 4F_2 + 5F_3 \to F_3$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & -5 & 3 & 300 \\ 0 & 0 & 32 & 51200 \end{pmatrix}$$

De la tercera fila: $32c = 51200\,;\, c = 1600$

De la segunda fila: $-5b + 3 \cdot 1600 = 300\,;\, b = 900$

De la primera fila: $a + 900 + 1600 = 10000\,;\, a = 7500$

Por tanto, se invierten 7500 € en el fondo A, 900 € en el fondo B y 1600 € en el fondo C.

3. Resuelve el sistema lineal: $\begin{cases} x-3y-4z=3 \\ -x+3y+z=0 \\ x-3y-10z=9 \end{cases}$

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -10 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1+F_2 \to F_2 \\ F_2+F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} 3F_2-F_3 \to F_3 \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser la última fila de la matriz de ceros, el sistema es compatible indeterminado. Para identificar el conjunto de soluciones, parametrizamos:

$$\begin{cases} y=t \\ z=-1 (\textit{de la segunda ecuación}) \\ -x-3t+4=3\,;\; x=-3t+1\ (\textit{de la primera ecuación}) \end{cases}$$

4. Tres grupos de personas desayunan en una cafetería. El primer grupo toma 2 cafés, 1 refresco y 3 dulces, por lo que pagan 8,40 €; el segundo grupo toma 4 cafés, 1 refresco y 5 dulces, por lo que pagan 13,80 €; el tercer grupo toma 1 café, 2 refrescos y 2 dulces, por lo que pagan 7,50 €. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

Solución

Resolveremos este problema utilizando un sistema lineal de ecuaciones. Definimos las siguientes variables:

$$c \equiv \textit{Precio de un café}; r \equiv \textit{precio de un refresco}\,; d \equiv \textit{precio de un dulce}$$

Del texto: "El primer grupo toma 2 cafés, 1 refresco y 3 dulces, por lo que pagan 8,40 €":

$$2c+r+3d=8{,}40$$

Del texto: "el segundo grupo toma 4 cafés, 1 refresco y 5 dulces, por lo que pagan 13,80 €":

$$4c+r+5d=13{,}80$$

Del texto: "el tercer grupo toma 1 café, 2 refrescos y 2 dulces, por lo que pagan 7,50 €":

$$c+2r+2d=7{,}50$$

Vamos a multiplicar todas las ecuaciones por 10 para no tener que trabajar con decimales. El sistema queda:

$$\begin{cases} 20c+10r+30d=84 \\ 40c+10r+50d=138 \\ 10c+20r+20d=75 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema utilizando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 & 84 \\ 40 & 10 & 50 & 138 \\ 10 & 20 & 20 & 75 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2F_1-F_2 \to F_2 \\ F_1-2F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 & 84 \\ 0 & 10 & 10 & 30 \\ 0 & -30 & -10 & -66 \end{pmatrix} 3F_2+F_3 \to F_3$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 & 84 \\ 0 & 10 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 20 & 24 \end{pmatrix} \begin{cases} 20c+18+36=84; c=1,5 \\ 10r+12=30\ ; r=1,8 \\ 20d=24; d=1,2 \end{cases}$$

Por tanto, una café cuesta 1,5 euros, un refresco 1,8 euros y 1,2 euros un dulce.

1. Para optimizar las ganancias un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno cultivando una cierta superficie de pimientos “P” y de tomates “T”. Descontando gastos, el beneficio por área de pimiento es de 200 € y de tomate 250 €. Diariamente hay 180 l. de agua para regar todo el terreno; un área de pimiento consume 10 l. mientras que una de tomate 20 l. La siembra de un área de pimiento cuesta 20 € y de una de tomate 10 €, siendo el presupuesto disponible 160 €.
Dibuja en el plano el recinto de posibles repartos de la superficie respetando las restricciones del problema y encuentra el valor en el que se alcanza el máximo. Calcula dicho máximo.

Solución

Definimos las variables de decisión:

$\boldsymbol{x \equiv \text{Áreas asignadas al cultivo de pimientos}}$

$\boldsymbol{y \equiv \text{Áreas asignadas al cultivo de tomates}}$

La función objetivo a minimizar es:

$\boldsymbol{F(x,y) \equiv 200x + 250y}$

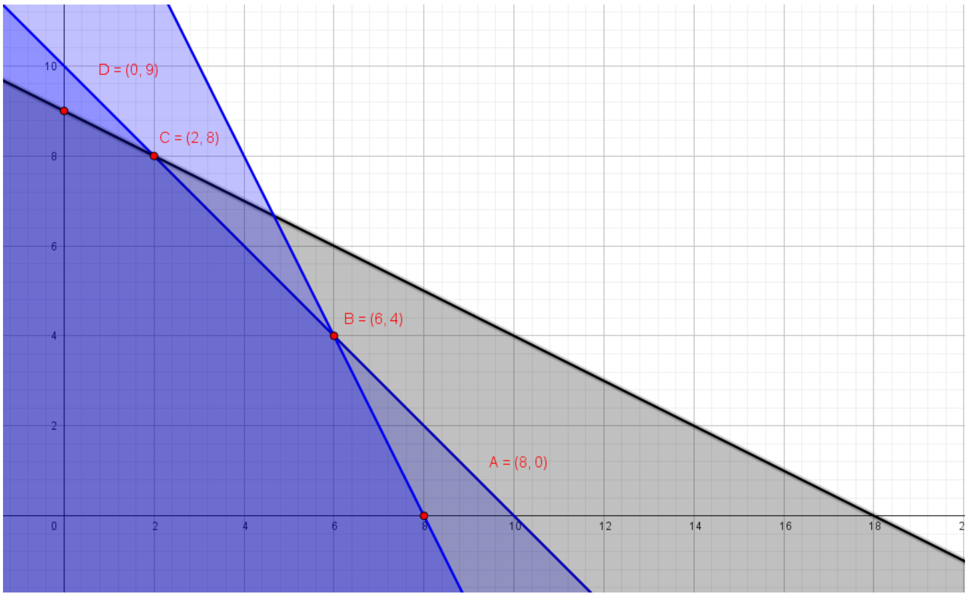
El conjunto de restricciones:

$x + y \leq 10$

$10x + 20y \leq 180$ Relativa al agua

$20x + 10y \leq 160$ Relativa a la siembra

Incluimos las restricciones $\boldsymbol{x \geq 0}$ $\boldsymbol{y \geq 0}$



El valor óptimo se alcanza en la frontera de la región factible, en concreto en los vértices A(8,0) B(6, 4) C(2,8) D(0,9).

Evaluamos la función objetivo:

$F(0,9) \equiv 200 \cdot 0 + 250 \cdot 9 = 2250$

$F(2,8) \equiv 200 \cdot 2 + 250 \cdot 8 = 2400$

$F(6,4) \equiv 200 \cdot 6 + 250 \cdot 4 = 2200$

$F(8,0) \equiv 200 \cdot 8 + 250 \cdot 0 = 1600$

Por tanto, el beneficio máximo se alcanza cuando se cultivan 2 áreas de pimiento y 8 de tomate, siendo el beneficio obtenido de 2400 €.

2. En un hotel se alojaron ayer 25 huéspedes procedentes de tres países, Italia, Portugal y Japón. Su gasto total en el hotel fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada portugués y 160 € a cada japonés. El registro del hotel muestra que el número de portugueses fue la cuarta parte de la suma de los números de huéspedes de los otros dos países. Determina el número de huéspedes de cada uno de los 3 países.

   Solución

   Definimos el significado de las variables a utilizar:

   $i \equiv \text{número de huéspedes italianos}$

   $p \equiv \text{número de huéspedes portugueses}$

   $j \equiv \text{número de huéspedes japoneses}$

   Del texto: "En un hotel se alojaron ayer 25 huéspedes procedentes de tres países, Italia, Portugal y Japón"

   $i + p + j = 25$

   Del texto: "Su gasto total en el hotel fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada portugués y 160 € a cada japonés"

   $140i + 130p + 160j = 3610$

   Del texto: "El registro del hotel muestra que el número de portugueses fue la cuarta parte de la suma de los números de huéspedes de los otros dos países."

   $p = \frac{1}{4}(i + j)$ trasformamos esta ecuación en otra equivalente sin fracciones:

   $i - 4p + j = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 140 & 130 & 160 & 3610 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 140F_1 - F_2 \to F_2 \\ F_1 - F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & 10 & -20 & -110 \\ 0 & 5 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

De la tercera fila: $5p = 25\,; p = 5$

De la segunda fila: $10 \cdot 5 - 20j = -110\,;\; j = 8$

De la tercera fila: $i + 5 + 8 = 25\,; i = 12$

Por tanto, hay 12 huéspedes italianos, 5 lusos y 8 nipones.

3. Resuelve el siguiente sistema lineal: $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = 5 \end{cases}$

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 - F_2 \to F_2 \\ F_1 + F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix} 2F_2 - F_3 \to F_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Parametrizamos para expresar todas las soluciones:

$$\begin{cases} z = k \\ y = -\frac{k}{5} + \frac{4}{5} \\ x - \frac{2k}{5} + \frac{8}{5} + 2k = 3\,; x = \frac{2k}{5} - \frac{8}{5} - 2k + 3\,; x = -\frac{8k}{5} + \frac{7}{5} \end{cases}$$

4. Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80 % y un tercer grupo abona el 50 %. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.

   Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

   Solución

   Definimos el significado de las variables a utilizar:

   $e \equiv \textit{número de viajeros que pagan el billete entero}$

   $c \equiv \textit{número de viajeros que pagan cuatro quintos del precio}$

   $m \equiv \textit{número de viajeros que pagan la mitad del precio}$

   Del texto: "Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos"

$$e + c + m = 60$$

Del texto: "La recaudación del autobús fue de 46,56 euros"

$$1.2e + 0.96c + 0.6m = 46{,}56$$

Trabajaremos con una ecuación equivalente que no tengan decimales:

$$120e + 96c + 60m = 4656$$

Del texto: "el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros"

$$m = 2(e + c)\ ;\ 2e + 2c - m = 0$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 120 & 96 & 60 & 4656 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{matrix}\right) \begin{matrix} 120F_1 - F_2 \to F_2 \\ 2F_1 - F_3 \to F_3 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 24 & 60 & 2544 \\ 0 & 0 & 3 & 120 \end{matrix}\right)$$

De la tercera fila: $3m = 120\ ; m = 40$

De la segunda fila: $24c + 60 \cdot 40 = 2544\ ; 24c = 144\ ; c = 6$

De la primera fila: $e + 6 + 40 = 60\ ; e = 14$