1. Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 km entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.

   Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

   Solución

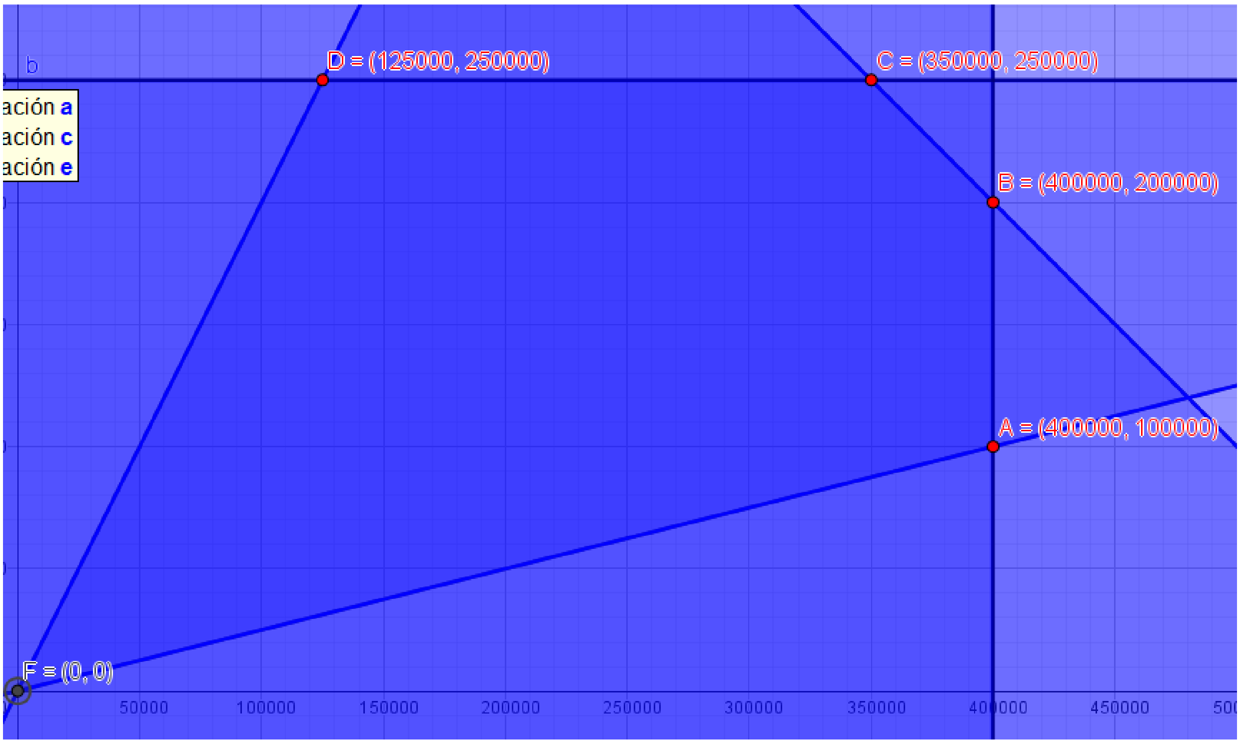
   Variables de decisión:

$$x \equiv Kilómetros\ de\ la\ furgoneta\ grande\ y \equiv Kilómetros\ de\ la\ furgoneta\ mediana$$

   $x \leq 400000\ ; y \leq 250000\ ; x + y \leq 600000$

   $y \leq 2x\ ;\ x \leq 4y\ ; incluimos\ también\ x \geq 0\ e\ y \geq 0$

   La función objetivo es: $F(x, y) \equiv 10x + 5y$



   Los vértices de la región factible donde la función objetivo alcanzará su valor óptimo son:

   $A(400000, 100000)\ ; F(400000, 100000) = 10 \cdot 400000 + 5 \cdot 100000 = 4500000$

$B(400000, 200000)$; $F(400000, 200000) = 10 \cdot 400000 + 5 \cdot 200000 = 5000000$

$C(350000, 250000)$; $F(350000, 250000) = 10 \cdot 350000 + 5 \cdot 250000 = 4250000$

$D(125000, 250000)$; $F(125000, 250000) = 10 \cdot 125000 + 5 \cdot 250000 = 1325000$

Por tanto, el valor óptimo es de 50000 euros y se obtiene cuando la furgoneta grande hace 400.000 km y la mediana 200.000

2. Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + y = a} \\ \boldsymbol{x + ay + az = 0} \\ \boldsymbol{z = 1} \end{cases}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.
b) Resuelva el sistema para a=2

Solución

$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$; $[A] = \boldsymbol{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \,; a^2 - 1 = 0;} \boldsymbol{\begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}}$

Caso 1; $\boldsymbol{\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases}}$

El rango de la matriz de coeficientes es tres, al igual que la matriz ampliada, por el teorema de Roche-Fröbenius, el sistema es compatible. Al ser el rango igual al número de ecuaciones y de incógnitas es determinado.

Caso 2; a=1

$\boldsymbol{A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$. El rango de A es dos pues existe un menor de orden dos distinto de cero: $\boldsymbol{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.}$

El rango de $\boldsymbol{A^*}$ es 3 pues existe un menor de orden tres distinto de cero:

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0}$$

por el teorema de Roche-Fröbenius, el sistema es incompatible

Caso 3; a=-1

$\boldsymbol{A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$. El rango de la matriz de coeficientes es igual a 2 pues el menor

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ es distinto de cero (también podemos darnos cuenta que la primera y segunda fila son combinación lineal).

Estudiemos el rango de la matriz ampliada: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$. Por tanto, el rango de la matriz ampliada es dos también. Por el teorema de Roche-Fröbenius, el sistema es compatible, siendo indeterminado por ser el rango menor que el número de incógnitas.

Resolvemos para a=2; $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

De la tercera ecuación: z=1;

La primera y segunda ecuación queda: $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ $y = 2 - 2x; x + 4 - 4x = -2; x = 2; y = -2$

3. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -a \\ 1 & -1 & \mathrm{a} \end{pmatrix}$

   a. Determine los valores de a para los cuales la matriz A es invertible

   b. Calculad A^{-1} para a=1.

Solución

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -a \\ 1 & -1 & \mathrm{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & -a \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (a^2 + a) - a - 1 = -a^2 - 2a - 1 = -(a+1)^2.$

Por tanto, únicamente no tiene inversa cuando a=-1.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $|A| = -4$

$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a. Calculad $A^{2022} + A^{2023}$

   b. Resolved la ecuación matricial $\boldsymbol{X \cdot A + B \cdot Bt = 2 \cdot A}$

Solución

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\mathrm{A}^{2022} = \left(\mathrm{A}^2\right)^{1011} = \mathrm{I}_2$$

$$\mathrm{A}^{2023} = \mathrm{A}^{2022} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A}$$

Por tanto, $A^{2022} + A^{2023} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

De la primera parte podemos observar que A es su propia inversa:

$$X \cdot A + B \cdot B^t = 2 \cdot A\,; XA = 2A - B \cdot B^t; X = (2A - B \cdot B^t)A = 2I_2 - B \cdot B^t \cdot A$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -a \end{pmatrix}$

   a. Determine los valores de a para los cuales la matriz A es invertible

   b. Calculad A^{-1} para a=1.

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix} = -a - 1 - a - a + a - a^2 = -(a^2 + 2a + 1)$$

$$\textit{Por tanto, cuando } a = -1 \textit{ la matriz no tiene inversa}$$

Para a=1 $|A| = -4$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \ A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y + az = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

   c) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.
   d) Resuelva el sistema para a=2

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 ; a^2 = 1 ; \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Caso 1; $a \neq 1 \ y \ a \neq -1.$

El rango de la matriz de coeficientes es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada, por tanto, el sistema es compatible por el teorema de Roche-Fröbenius. Como el número de incógnitas coincide con el rango es determinado.

Caso 2 $a = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, el rango de la matriz de coeficientes es dos pues existe un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Calculamos el rango de la matriz ampliada: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$

Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 3, al ser distinto del rango de la matriz de coeficientes, el sistema es incompatible (Teorema de Roche-Fröbenius).

Caso 3 $\boldsymbol{a} = \mathbf{-1}$

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ el rango de la matriz de coeficientes es dos pues existe un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{1}.$

Como podemos observar la primera y segunda fila son combinación lineal, y la cuarta columna se pude obtener sumando la segunda y tercera columna, por lo que la matriz ampliada tiene rango 2. Otra forma de comprobarlo consiste en calcular el menor f-formado por las tres últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Por tanto, por el teorema de Roche-Fröbenius, el sistema es compatible, al ser menor el rango que el número de incógnitas, es indeterminado.

3. Una confitería tiene en el almacén 320 bombones de crema de cacao, 240 bombones con frutos secos y 200 bombones con licor. Estos bombones se venden empaquetados en dos tipos de cajas: azules y rojas. En cada caja azul se incluyen 4 bombones de crema, 4 de frutos secos y 2 de licor. En cada caja roja hay 6 bombones de crema, 2 de frutos secos y 4 de licor. Si la caja azul se vende a 8 euros y la caja roja se vende a 10 euros:

   a. Plantear el problema que determina el número de cajas de cada tipo que se han de confeccionar para maximizar la recaudación.

   b. Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

   Solución

   Definimos las variables de decisión:

   $x \equiv \textit{Número de cajas azueles } y \equiv \textit{Número de cajas rojas}$

   La función objetivo es: $F(x, y) \equiv 8x + 10y$

   Las restricciones:

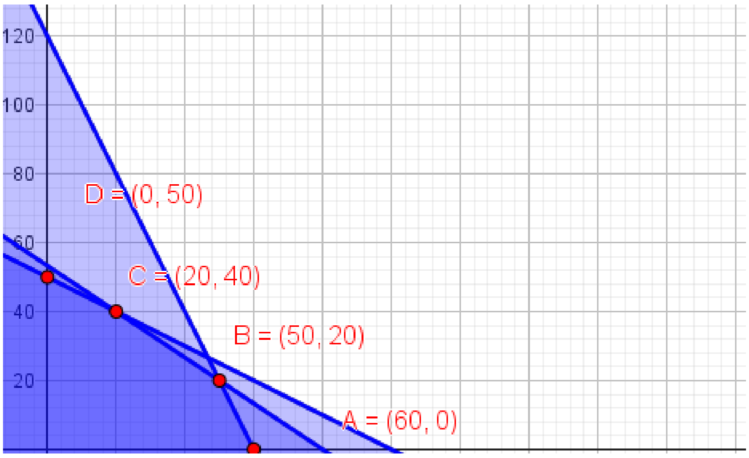
$4x + 6y \leq 320$ Relativa a los bombones de crema

$4x + 2y \leq 240$ Relativa a los bombones de frutos secos

$2x + 4y \leq 200$ Relativa a los bombones de licor

Incluimos las restricciones $x \geq 0 \; e \; y \geq 0$

Vamos a calcular la región factible y los vértices de la misma para encontrar el valor / valores óptimos:



Los vértices y los valores correspondientes de la función objetivo son:

$A(60{,}0)\ F(60{,}0) = 8 \cdot 60 + 10 \cdot 0 = 480$

$B(50{,}20)\ F(50{,}20) = 8 \cdot 50 + 10 \cdot 20 = 600$

$B(20{,}40)\ F(20{,}40) = 8 \cdot 20 + 10 \cdot 40 = 560$

$B(0{,}50)\ F(0{,}50) = 0 \cdot 50 + 10 \cdot 50 = 500$

Por tanto, el máximo beneficio se alcanza al fabricar 50 cajas azules y 20 rojas, obteniéndose un beneficio de 600 euros.