1. Calcula la primitiva para las siguientes funciones:

   a. $f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2}$ se trata de una integral inmediata:

   $$\int f(x)\,dx = \int \sqrt{2}xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-x^2} + k. \forall k \in \mathbb{R}$$

   b. $g(x) = ln(x+1)$ calcularemos la primitiva utilizando el método de integración por partes:

   $$u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{1}{x+1}dx$$

   $$dv = dx \Rightarrow v = x$$

   $$\int udv = uv - \int vdu = \mathrm{x} \cdot \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$

   Cómo $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

   $$\int \frac{x}{x+1}dx = \int 1 - \frac{1}{x+1}dx = x - \ln\,(x+1)$$

   Por tanto:

   $$\int \ln(x+1) = \mathrm{x} \cdot \ln(x+1) + x - \ln\,(x+1) + k, \forall k \in \mathbb{R}$$

2. Se considera la función real de variable real f(x) definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2-9} & si\ x < 3 \\ x^2 - 4 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

Solución

   a. Estudiar la continuidad de la función.

   El dominio de la función consiste en todos los reales, salvo el valor x=-3. Puesto que se trata de un cociente de polinomios y una parábola esta función es continua en todos los puntos de su dominio, salvo en x=3 donde se produce una modificación en su definición.

   Estudiemos la continuidad en x=3:

   $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = -\infty$; $\lim_{x\to 3^+} x^2 - 4 = 5$ Por tanto, la función tiene una discontinuidad de salto infinito en x=3.

   b. Determinar si la función tiene asíntotas.

Existen dos asíntotas verticales en x=-3 y en x=3:

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x^3}{x^2-9} = -\infty \ ; \ \lim_{x\to -3^+}\frac{x^3}{x^2-9} = +\infty \ ; asíntota\ vertical\ en\ x = -3$$

$$\lim_{x\to +3^-}\frac{x^3}{x^2-9} = -\infty \ ; asíntota\ vertical\ en\ x = -3$$

Tiene una asíntota oblicua $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2-9} : x = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^3-9x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2-9} - x = \lim_{x\to -\infty}\frac{9x}{x^2-9} = 0\ ; por\ tanto\ la\ asíntota\ es\ y = x$$

3. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-9}$

   a. Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

   b. Calculad la ecuación de la recta tangente en x=-1

Solución

Calculemos los puntos críticos:

$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-9)-2x^4}{(x^2-9)^2} = \frac{x^4-27x^2}{(x^2-9)^2}$ igualando a cero:

$x^4 - 27x^2 = 0\ ;\ (x^2-27)x^2 = 0; x = 0; x = -3\sqrt{3}; x = 3\sqrt{3}$

Estudiemos el signo de la derivada en los puntos críticos (tomaremos en cuenta los valores de la función donde se anula el denominador).

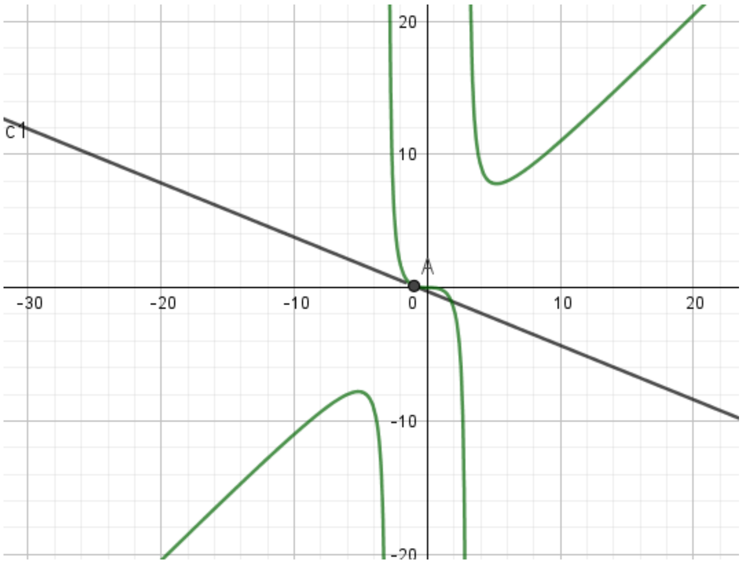
+	-	-	-	-	+
	$-3\sqrt{3}$	-3	0	3	$3\sqrt{3}$

Por tanto: $\boldsymbol{es\ creciente\ en}\ \left(-\infty, 3\sqrt{3}\right) \cup \left(3\sqrt{3}, +\infty\right)\ \boldsymbol{y\ decreciente\ en\ el\ resto\ de\ su\ dominio}$

La pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada en el punto, por tanto:

$$f'(-1) = \frac{(-1)^4 - 27(-1)^2}{((-1)^2 - 9)^2} = -\frac{13}{32} \qquad f(-1) = \frac{-1}{1-9} = \frac{1}{8}$$

Por tanto la recta es $\frac{y-\frac{1}{8}}{x+1} = -\frac{13}{32}$



4. Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

Solución

Para calcular los intervalos de concavidad y convexidad hay que calcular la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x^3}{x^2-1} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \ ; \ f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

Igualando a cero la segunda derivada observamos que no hay ningún valor que anule la segunda derivada.

Estudiando el signo de la segunda derivada y teniendo en cuenta los puntos que anulan el denominador de la función (en -1 y 1 no está definida la función):

$Si\ x \in (-\infty, -1)\ \ f''(x) > 0\ la\ función\ es\ convexa$

$Si\ x \in (-\mathbf{1}, \mathbf{1})\ \ f''(x) < 0\ la\ función\ es\ cóncava$

$Si\ x \in (\mathbf{1}, +\infty)\ \ f''(x) > 0\ la\ función\ es\ convexa$

Por tanto, no hay puntos de inflexión.

5. Sea $f(x) = x^2 e^{-ax}\ con\ a \neq 0$

   a. Calcular el valor de a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa x=2.

   b. Calculad los extremos relativos cuando a=2 y clasificadlos.

Solución

a. Calculamos la derivada e igualamos a cero para calcular el valor de a.

$f'(x) = 2xe^{-ax} - ax^2e^{-ax} = e^{-ax}(2x - ax^2);\ \ e^{-ax}(2x - ax^2) = 0\ ;\ 2x - ax^2 = 0$

$2x - ax^2 = x(2 - ax) = 0\ ; por\ tanto, x = 0\ y\ x = \dfrac{2}{a}$

Como queremos que en x=2 tenga un extremo relativo: $2 = \frac{2}{a}\ ; a = 1$

b. Cuando a=2 $f'(x) = e^{-2x}(2x - 2x^2)\ ;\ x(2 - 2x) = 0\ ; x = 0\ o\ x = 1$

   Estudiemos el signo de la derivada:

   $Si\ x \in (-\infty, 0)\ \ f'(x) < 0\ la\ función\ es\ decreciente$

   $Si\ x \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})\ \ f'(x) > 0\ la\ función\ es\ creciente$

   $Si\ x \in (\mathbf{1}, +\infty)\ \ f'(x) < 0\ la\ función\ es\ decreciente$

   Por tanto, en x=0 hay un mínimo relativo y en x=1 hay un máximo relativo