1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Calculad el valor de ***m*** para que $A \cdot B = C^t$

b. Para ***m=0*** calculad B^{-1}

Solución

a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-1 & 0 & m+2 \\ m-1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Igualando las dos matrices:

$$\begin{pmatrix} 2m-1 & 0 & m+2 \\ m-1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$2m-1=3\,; m+2=4\,; m-1=1$ **es decir** $m=2$

b.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ay + z = 6 \\ 2x - y + z = a-1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

a. Discuta el sistema para los distintos valores de $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$.

b. Resuelva el sistema de ecuaciones para ***a* = *2***.

Solución

a.

Calculemos el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3a-1;\ -3a-1=0\,; a=-\frac{1}{3}$$

Por tanto, podemos decir que:

Caso 1: $\boldsymbol{a \neq -\frac{1}{3}}$

El determinante de A es distinto de cero, por tanto, el rango de A es tres al igual que el de la matriz ampliada. Por el teorema de Rôche-Fröbenius el sistema es compatible. Es determinado, pues el rango de la matriz coincide con el número de ecuaciones y de incógnitas.

Caso 1: $\boldsymbol{a = -\frac{1}{3}}$

El determinante de A es cero, como hay un menor de orden 2 distinto de cero, el rango es 2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Calculemos el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -4/3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 6 & -3 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2F_1 - F_2 \to F_2 \ y \ F_1 + F_3 \to F_3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} 2F_2 - F_3 \to F_3 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 3.

Como el rango de la matriz de coeficientes no coincide con el rango de la matriz ampliada, por el teorema de Rôche-Fröbenius el sistema es incompatible.

b.

Para $a = 2\,;\ |A| = -7$. Resolveremos el sistema por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1$$

3. Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.
    a. Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
    b. Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Solución

Se trata de un problema de programación lineal.

Variables:

$x \equiv litros\ preparados\ de\ helado$

$y \equiv litros\ preparados\ de\ horchata$

Restricciones:

$x + 2y \leq 20\ ; x \leq 15\ ; x + y \geq 10$

Función objetivo:

$F(x, y) \equiv 25x + 12y$

Los puntos de corte son:

$A(0{,}10); B(15{,}2.5); C(0{,}10)\ ; D(15{,}0)$

Calculemos el valor máximo beneficio, sustituyendo en la función objetivo:

$A\ F(10{,}0) \equiv 25 \cdot 10 + 12 \cdot 0 = 250$

$B\ F(15{,}2{,}5) \equiv 25 \cdot 15 + 12 \cdot 2{,}5 = 405$

$C\ F(0{,}10) \equiv 25 \cdot 0 + 12 \cdot 10 = 120$

$D\ F(15{,}0) \equiv 25 \cdot 15 + 12 \cdot 0 = 345$

Por tanto, el máximo beneficio de 405 euros se alcanza cuando se producen 15 litros de helado y 2,5 litros de horchata.