1. Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+2}, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$$

a. Estúdiese la continuidad de f (x) en R.

b. Calcúlese $\int_{-1}^{0} f \ dx$

Solución

Habrán de estudiarse los valores x=-2 (se anula el denominador en el primer tramo de la función) y x=0 (punto donde cambia la definición de la función.

$\lim_{x \to .-2^-} \frac{2}{x+2} = -\infty$; $\lim_{x \to .-2^+} \frac{2}{x+2} = +\infty$ por tanto la función es discontinua en x=-2.

$\lim_{x \to .0^-} \frac{2}{x+2} = 1$; $\lim_{x \to .0^-} x+2 = 2$ al ser los límites laterales distintos, no existe el límite en x=0, por tanto, la función no es continua en x=0.

$$\int_{-1}^{0} f \ dx = \int_{-1}^{0} \frac{2}{x+2} \ dx = F(0) - F(-1) = 2Ln(2) - 2Ln(0) = 2Ln2$$

$$F(x) = \int \frac{2}{x+2} dx = 2Ln(x+2) \ + \ k, \forall k \in \mathbb{R}$$

2. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + 10 \; si \; 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{100}{x-3} + bx^2 \; si \; x > 5 \end{cases}$

   a. Determina los valores de a y b para que f sea continua y tenga un mínimo relativo en x=2.

   b. Para a=0, calcula el área limitada por la función f y el eje OX en el intervalo [0,5].

Solución

Ambos tramos de función son funciones continuas, pues el segundo tramo no incluye el valor 3 (anula el denominador).

Como la función debe ser continua habrá que asegurar que los límites laterales en x=5 son iguales, es decir:

$$5^3 + a \cdot 5 + 10 = \frac{100}{5-3} + b \cdot 5^2 \; ; \; 5a + 135 = 50 + 25b; \; 5a - 25b = -85$$

Para que la función tenga un mínimo relativo en x=2, la derivada de la función deberá anularse:

$$f'(x) = 3x^2 + a \; si \; 0 < x < 5 \; ; \;\; f'(2) = 3 \cdot 2^2 + a \; ; \; 12 + a = 0 \; ; \; a = -12$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$5a - 25b = -85 \; ; \; -60 - 25b = -85 \; ; \; -25b = -25 \; ; \; b = \; 1$$

Por tanto, la solución es $a = -12 \; y \; b = \; 1$

Para calcular el área, primero veremos el signo de la función en el intervalo: como todos los valores del intervalo son positivos, al elevar al cubo y sumar 10 la función será siempre positiva. Por tanto, el área es:

$$Área = \int_0^5 x^3 + 10 \; dx = F(5) - F(0) = \frac{1}{4}5^4 + 10 \cdot 5 - 0 = \frac{625}{4} + 50$$
$$= \frac{825}{4} \; unidades \; de \; superficie$$

$$F(x) = \int x^3 + 10 \; dx = \frac{1}{4}x^4 + 10x + \; k, \forall k \in \mathbb{R}$$

3. Dada la función $f(x)=\frac{x^2-4}{2x-5}$, calculad:

   a. Dominio de f

   b. ¿Para qué valores de x es la función positiva?

   c. Asíntotas

   d. Sus máximos y mínimos relativos, si existen

Solución

$Dom(f)=\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{2}\right\}$; $2x-5=0$; $x=\frac{5}{2}$

Factorizamos: $\frac{x^2-4}{2x-5}=\frac{(x-2)(x+2)}{2x-5}$

$x<-2$; $f\ <0$

$-2<x<2$; $f\ >0$

$2<x<\frac{5}{2}$; $f\ <0$

$x>\frac{5}{2}$; $f>0$

Tiene una asíntota vertical en $x=\frac{5}{2}$,

No tiene asíntotas horizontales, pero si una oblicua $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{2x-5}:x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{2x^2-5x}\right)=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{2x-5}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-8-\left(2x^2-5x\right)}{4x-10}\right)=\frac{5}{4}$$

Por tanto, la asíntota es $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

Calculamos los valores que anulan la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{2x(2x-5) - 2(x^2-4)}{(2x-5)^2} = \frac{4x^2 - 10x - 2x^2 + 8}{(2x-5)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 10x + 8}{(2x-5)^2}$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0\ ;\ x = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{4} = \frac{10 \pm 6}{4} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x-4)}{(2x-5)^2} \text{ función derivada factorizada}$$

Calculemos la monotonía de la función en los intervalos definidos por sus puntos críticos junto con los puntos donde no se encuentra definida:

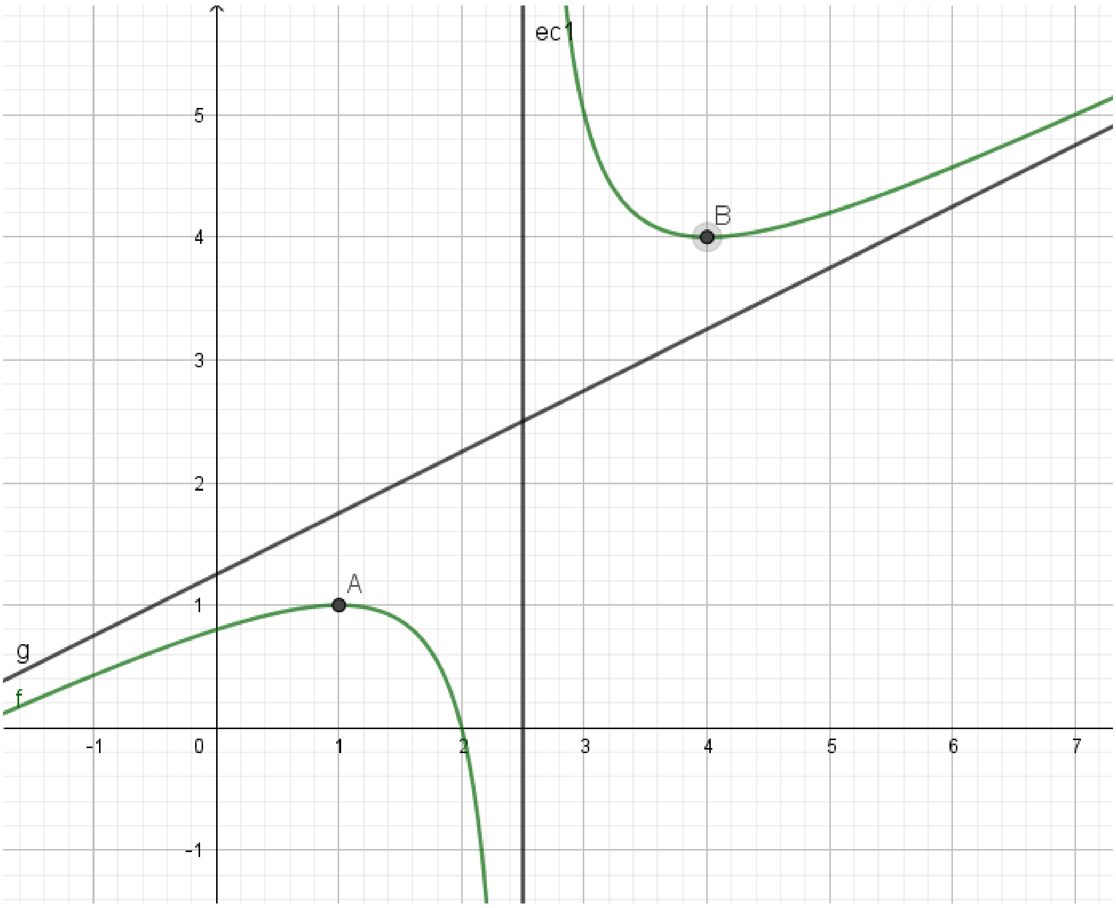
$x < 1\ ;\ f' > 0\ ;\ f\ creciente$

$1 < x < \frac{5}{2}\ ;\ f' < 0\ ;\ f\ decreciente$

$\frac{5}{2} < x < 4\ ;\ f' < 0\ ;\ f\ decreciente$

$x > 4\ ;\ f' > 0\ ;\ f\ creciente$

Por tanto, en x=1 hay un máximo relativo y en x=4 hay un mínimo relativo.



ec1
B
A
g
f
5
4
3
2
1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

4. Calcula:

a. $\int \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx$

b. La derivada de la función: $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2-1}$

Solución

$$\int \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx = \frac{10}{16}\sqrt{8x^2+1} + \frac{3}{8}e^{-4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)(2x\ln x + x) - 2x\left(x^2 \ln x\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

5. Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t-6}{t+4}$$

Donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a) ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?
b) En qué momento $t \in [3,10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.
c) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000 €?

Solución

Para resolver el primer apartado estudiaremos donde la función es negativa. Es importante saber que siempre el valor de t es positivo (t representa el número de años transcurridos desde la apertura de la empresa):

$$2t-6=0\ ;\ t=3\ ;\ \begin{cases} Si\ 0<t<3, la\ función\ es\ negativa \\ t>3, la\ función\ es\ positiva \end{cases}$$

Por tanto, los tres primeros años (desde 0 a 3) la empresa tendrá pérdidas.

Calculemos la derivada de la función: $\mathrm{f}'(\mathrm{t}) = \frac{14}{(\mathrm{t}+4)^2}$. Podemos observar que la derivada siempre es positiva, por lo que estamos ante una función siempre creciente, por tanto, el máximo valor lo alcanza en x=10, siendo el valor de la función de: $\mathrm{B}(10) = 1, \text{es decir}, 100.000\ €$.

La última pregunta se resuelve encontrando el valor de t para el que la función alcanza el valor 1,5:

$$\frac{2t-6}{t+4} = 1{,}5\ ;\ 2\mathrm{t}-6 = 1{,}5\mathrm{t}+6\ ;\ 0{,}5\mathrm{t} = 12\ ;\ \mathrm{t} = 24$$

Es decir, deberán transcurrir 24 años.

1. Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$

   a. Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función f y el eje OX

   b. Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=0.

Solución

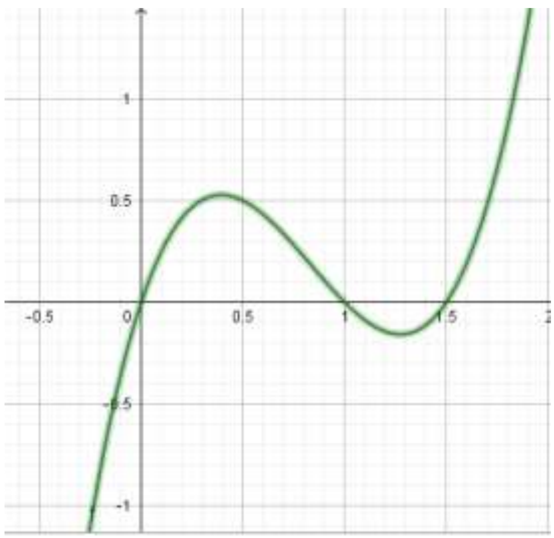
Sabemos que la función es continua, por ser una función polinómica. Calculemos los puntos de corte con el eje de abscisas para saber en que intervalos la gráfica de la función es positiva o negativa.

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = 0\ ;\ \mathrm{x}(2x^2 - 5\mathrm{x} + 3) = 0\ \begin{cases} \mathrm{x} = 0 \\ 2x^2 - 5\mathrm{x} + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{x} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Podemos expresar la función factorizada como: $f(x) = 2\mathrm{x}(\mathrm{x}\text{-}1)\left(\mathrm{x}\text{-}\frac{3}{2}\right)$

$$\mathrm{Si\ x} < 0\ ;\ \mathrm{f} < 0\quad \mathrm{Si}\ 0 < \mathrm{x} < 1;\ \mathrm{f} > 0\quad \mathrm{Si}\ 1 < \mathrm{x} < \frac{3}{2};\ \mathrm{f} < 0\quad \mathrm{Si\ x} > \frac{3}{2};\ \mathrm{f} > 0$$



Por tanto, el área solicitada teniendo en cuenta los puntos de corte con los ejes se puede calcular:

$$\text{Área} = \int_0^1 f\,dx + \left|\int_1^{\frac{3}{2}} f\,dx\right| = F(1)\text{-}F(0) + \left|F\left(\frac{3}{2}\right)\text{-}F(1)\right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{20} = \frac{23}{60}\ \text{unid. sup.}$$

$$F(x) = \int f dx = \int 2x^3 - 5x^2 + 3x\ dx = \frac{1}{2}x^4\text{-}\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + k, \forall k \in \mathbb{R}$$

Para calcular la recta tangente en x=0, calculamos $f(0)$, que es igual a 0.

Derivamos, para calcular la pendiente:

$$f'(x) = 6x^2\text{-}10x + 3\ ;\ f'(0) = 3$$

Por tanto, la recta es: $\frac{y-0}{x-0} = 3\ ;\ y = 3x$

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x+3}$. Calculad:

   a. Dominio de f

   b. ¿Para qué valores de x es la función positiva?

   c. Asíntotas

   d. Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

Solución

El dominio de la función son todos los reales, salvo los valores que anulan el denominador: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}\text{-}\left\{\text{-}\frac{3}{2}\right\}$

Factorizamos el numerador: $x^2 - 2x + 1 = 0\ ;\ (x\text{-}1)^2 = 0$. Por tanto, el numerador siempre es positivo: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{2x+3}$

$$\text{Si } x < \text{-}\frac{3}{2}\ ;\ f < 0 \quad \text{Si } x > \text{-}\frac{3}{2};\ f > 0$$

La función tiene una asíntota vertical $x = \text{-}\frac{3}{2}$

No tiene asíntotas horizontales, pero si una oblicua $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{2x+3}:x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{2x^2+3\text{x}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{2x+3}-\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-4\text{x}+2-(2x^2+3x)}{4x+6}\right) = -\frac{7}{4}$$

Por tanto, la asíntota oblicua es: $\mathrm{y} = \frac{1}{2}\mathrm{x} - \frac{7}{4}$

Para el cálculo de extremos relativos, derivamos la función y estudiamos sus puntos críticos (valores que anulan la derivada):

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{2\mathrm{x}^2+6\mathrm{x}-8}{(2x+3)^2} = \frac{2(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-4)}{(2x+3)^2}\,;\ 2\mathrm{x}^2+6\mathrm{x}-8 = 0\,;\ \mathrm{x} = \begin{cases}1\\-4\end{cases}$$

Estudiamos la monotonía de la función para saber si son máximos o mínimos relativos:

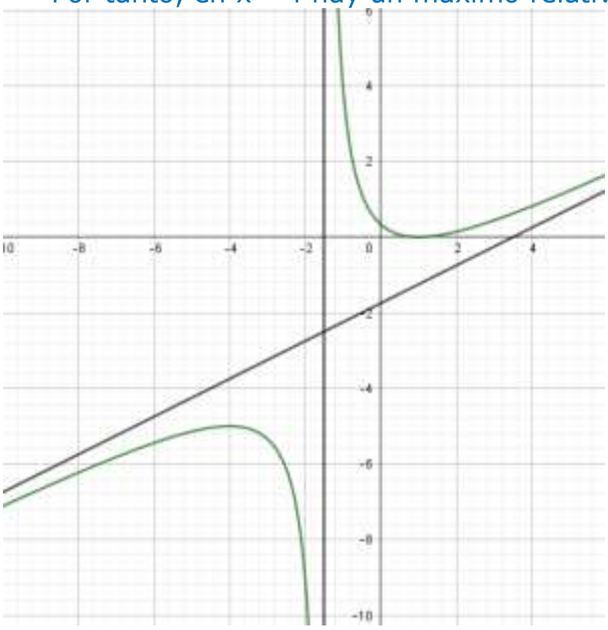
$\mathrm{x} < -4\ \mathrm{f}' > 0\,;$ f es creciente

$-4 < \mathrm{x} < -\frac{3}{2}\ \ \mathrm{f}' < 0\,;$ f es decreciente

$-\frac{3}{2} < \mathrm{x} < 1\ \ \mathrm{f}' < 0\,;$ f es decreciente

$\mathrm{x} > 1\ \ \mathrm{f}' > 0\,;$ f es creciente

Por tanto, en x=-4 hay un máximo relativo y en x=1 hay un mínimo relativo.



3. Calcula:

a. $\int \left(\frac{2x}{\sqrt{3x^2+5}} - 5xe^{-7x^2} \right) dx$

b. La derivada de la función: $f(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x-1}}$

Solución

$$\int \left(\frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 5}} - 5xe^{-7x^2} \right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2 + 5} + \frac{5}{14} e^{-7x^2}$$