1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   a. Determínese si A y B son inversibles y, en su caso, calcúlese la matriz inversa.

   b. Resuélvase la ecuación matricial XA-B=2I, siendo I la matriz identidad de orden tres.

Solución

a) Para que una matriz tenga inversa es necesario que su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16 + 15 = 1 \neq 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$$

Por tanto, la matriz A tiene inversa y la B no.

Para calcular la inversa de A calcularemos en primer lugar su matriz adjunta:

$a_{11} = 4 \quad a_{12} = 4 \quad a_{13} = 1$

$a_{21} = -3 \quad a_{22} = -3 \quad a_{23} = -1$

$a_{31} = 0 \quad a_{32} = 1 \quad a_{33} = -1$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\mathrm{XA} - \mathrm{B} = 2\mathrm{I}\,;\mathrm{XA} = 2\mathrm{I} + \mathrm{B}\,;\ \mathrm{XA}A^{-1} = (2\mathrm{I} + \mathrm{B}\,)A^{-1}\,; X = (2\mathrm{I} + \mathrm{B}\,)A^{-1}$

Por tanto:

$$(2\mathrm{I} + \mathrm{B}\,) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2\mathrm{I} + \mathrm{B}\,)A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro m:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m+2)z = 3 \end{cases}$$

a. Discutir el sistema para los distintos valores de m

b. Resolved el sistema para m=3.

Solución

a. Calcularemos el determinante de la matriz de coeficientes, pues el rango depende de su valor.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & m+2 \end{vmatrix} = -3 + m + 2 = m - 1$$

Por tanto, el determinante de A será cero cuando m=1.
Ahora, para cada valor de m utilizaremos el teorema de Rouche-Frobenius para determinar el tipo de sistema.
Caso 1 $m \neq 1$
Como el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, el rango de la matriz de coeficientes es 3 y coincide con el rango de la matriz ampliada, por tanto, por el teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible. Como el rango coincide con el número de incógnitas es determinado.
Caso 2 $m = 1$
En este caso, la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Podemos comprobar que la segunda fila puede obtenerse sumando la primera y la tercera (ya sabíamos que el rango de la matriz era menor que tres, pues el determinante de la matriz es igual a cero).
El rango de la matriz es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
Estudiemos el rango de la matriz ampliada, utilizaremos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{cases} F_1 - 2F_2 \to F_2 \\ F_2 + F_3 \to F_3 \end{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Como puede observarse, el rango de la matriz ampliada también es 2, por tanto, por el teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible. Al ser el rango menor que el número de incógnitas el sistema es indeterminado.

b. Para m=3 sabemos por el apartado 1 que el sistema es compatible determinado y que $|A| = 3 - 1 = 2$. Utilizaremos el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{16}{2} = 8$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

3. Una autoescuela tiene abiertas 3 sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera. Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera.

    a. Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar el número de alumnos matriculados en cada sucursal.
    b. Resolvedlo.

Solución

Definimos las incógnitas:

$$x \equiv \text{Número de alumnos matriculados en la primera sucursal}$$

$$y \equiv \text{Número de alumnos matriculados en la segunda sucursal}$$

$$z \equiv \text{Número de alumnos matriculados en la tercera sucursal}$$

"El número total de matriculados es 352"

$$x + y + z = 352$$

"…pero los matriculados en la tercera son sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera…"

$$\frac{x}{4} = z\,;\, x - 4z = 0$$

"…la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera"

$$x - y + 2 = 2z\,;\, x - y - 2z = -2$$

Por tanto, queda el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 352 \\ x - 4z = 0 \\ x - y - 2z = -2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss, dado que los coeficientes de x son todos iguales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 352 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 - F_2 \to F_2 \\ F_1 - F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 352 \\ 0 & 1 & 5 & 352 \\ 0 & 2 & 3 & 354 \end{pmatrix} 2F_2 - F_3 \to F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 352 \\ 0 & 1 & 5 & 352 \\ 0 & 0 & 7 & 350 \end{pmatrix}$$

Interpretando la última fila: $7z = 350\,; z = 50$

Sustituyendo en la segunda fila: $y + 5 \cdot 50 = 352\,; y = 102$

Por último, sustituyendo $x + 102 + 50 = 352\,; x = 200$

1. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ 0 & 1 & 1\\ m-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\ C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

   a. Calculad el valor de ***m*** para que $A\cdot B=C^t$
   b. Para ***m=0*** calculad B^{-1}

Solución

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ 0 & 1 & 1\\ m-1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m-1 & 0 & m+2\\ m-1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2m-1 & 0 & m+2\\ m-1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Por tanto: $2m-1=3\,;m=2\ y\ m+2=4\,;m=2\ y\ m-1=1\,;m=2$.

b) $Si\ m=0\,;\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\ ;\ |B|=1$

$b_{11}=1\quad b_{12}=-1\quad b_{13}=1$
$b_{21}=0\quad b_{22}=1\quad b_{23}=0$
$b_{31}=0\quad b_{32}=-1\quad b_{33}=1$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro m:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=2 \\ 5x+3y+mz=m+4 \end{cases}$$

a. Discutir el sistema para los distintos valores de m

b. Resolved el sistema para m=1.

Solución

a) Calcularemos en primer lugar el valor del determinante de la matriz de coeficientes en función de m:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & m \end{pmatrix} ;\ |A|=m-3-2m+5+1=-m+3$$

Igualando a cero $-m+3=0\,; m=3$

Por tanto:

Caso I $m \neq 3$

El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, por lo tanto, su rango es 3, igual al rango de la matriz ampliada. Por el teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible. Al haber tantas incógnitas como rango tiene la matriz de coeficientes, el sistema es determinado.

Caso II $m=3$

En este caso sabemos que el determinante de la matriz de coeficientes es cero, por lo que el rango de la matriz de coeficientes es menor que tres. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ es distinto de cero, por tanto, la matriz de coeficientes es dos.

Estudiemos el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Podemos observar, como las columnas 2 y 3 son iguales. Estudiaremos el determinante formado por la primera, segunda y cuarta fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}=1-4+3=0$$

Por tanto, el rango de la matriz ampliada es dos y el sistema, por el teorema de Rouche-Frobenius es compatible. Como el número de incógnitas es mayor que el rango, el sistema es indeterminado.

b) Para m=1 sabemos que el sistema, por el estudio anterior, es compatible. Así que podemos utilizar el método de Cramer para su resolución.

$$|A| = -m + 3\,;\ -1 + 3 = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6+3+1}{2} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3+9+0}{2} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

3. La suma de las edades actuales de tres hermanos es 63 años. Hace dos años, la edad del mediano era 5 años más que un tercio de la suma de las edades de los otros dos, y dentro de cuatro años, el menor tendrá 9 años más que la quinta parte de la suma de los otros dos. Halla las edades actuales de cada uno de los hermanos.

Solución

Definimos las incógnitas:

$$x \equiv Edad\ actual\ del\ hermano\ mayor$$

$$y \equiv Edad\ actual\ del\ hermano\ mediano$$

$$z \equiv Edad\ actual\ del\ hermano\ menor$$

"La suma de las edades actuales de tres hermanos es 63 años"

$$x + y + z = 63$$

"Hace dos años, la edad del mediano era 5 años más que un tercio de la suma de las edades de los otros dos"

$$y - 2 - 5 = \frac{x - 2 + z - 2}{3}\ ; x - 3y + z = -17$$

“ y dentro de cuatro años, el menor tendrá 9 años más que la quinta parte de la suma de los otros dos”

$z+4-9=\frac{y+4+x+4}{5}$; $x+y-5z=-25$

El sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 1 & -3 & 1 & -17 \\ 1 & 1 & -5 & -33 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1-F_2 \to F_2 \\ F_1-F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & 4 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 6 & 96 \end{pmatrix}$$

De la tercera fila $6z=96$; $z=16$

De la segunda fila $4y=80$; $y=20$

De la primera fila $x+20+16=63$; $x=27$