1. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A) = 0,4 \;\; ; \;\; p(B|A) = 0,25 \;\; ; \;\; p(\bar{B}) = 0,75$$

a) ¿Son $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ independientes? Razona la contestación.

b) Calcula $\boldsymbol{p(A \cap B)}$ y $\boldsymbol{p(A \cup B)}$

c) Calcula $\boldsymbol{p(B\,/\,\bar{A})}$

Solución

Dos sucesos son independientes si la probabilidad de la intersección coincide con el producto de probabilidades:

$$P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$$

Para calcular la probabilidad de la intersección utilizaremos la fórmula de la probabilidad condicionada: $0.25 = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{0.4}$ $despejando\ P(A \cap B) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$

Por tanto, los sucesos son independientes.

$P(A \cap B)$ ya lo hemos calculado con anterioridad.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.25 - 0.1 = 0.55$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.25 - 0.1}{1 - 0.4} = \frac{0.15}{0.6} = 0.25$$

2. Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas con el número 1 y 7 con el número 2. En la bolsa B hay 6 bolas con el número 1 y 2 con el número 2. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos dos bolas de B, de una en una sin reemplazamiento. ¿cuál es la probabilidad de que

a) las bolas extraídas de B tengan el número 1?

b) las tres bolas tengan el número 1?

c) al menos una bola extraída de B tenga el número 2?

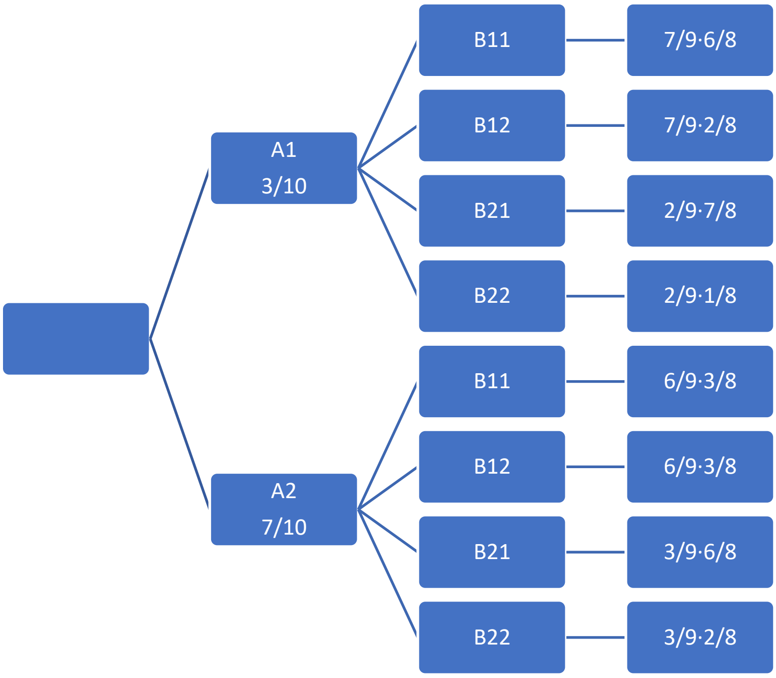
Solución

En primer lugar, vamos a definir los siguientes sucesos:

$A_i \equiv De\ la\ bolsa\ A\ se\ ha\ extraido\ una\ bola\ de\ valor\ i\ (1\ o\ 2)$

$B_{ij} \equiv De\ la\ bolsa\ B\ se\ han\ extraido, en\ primer\ lugar\ una\ bola\ de\ valor\ i\ y\ después\ un\ bola\ de\ valor\ j$

Vamos a organizar la información en un árbol:



Las hojas finales contienen la probabilidad asociada a los sucesos B_{ij}. Por ejemplo, la probabilidad $P(B_{21}/A_2)$ se ha calculado teniendo en cuenta que la bolsa B tras introducir la bola que hemos obtenido de la bolsa A es un 2, por lo que la composición de la bolsa B es de 9 bolas, seis de ellas con el valor 1 y tres con el valor 2. Por tanto:

$$P(B_{21}/A_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{4}$$

a. $P(B_{11}) = P(A_1)P(B_{11}/A_1) + P(A_2)P(B_{11}/A_2) = 0.3 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} + 0.7 \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0.175 + 0.175 = 0.35$

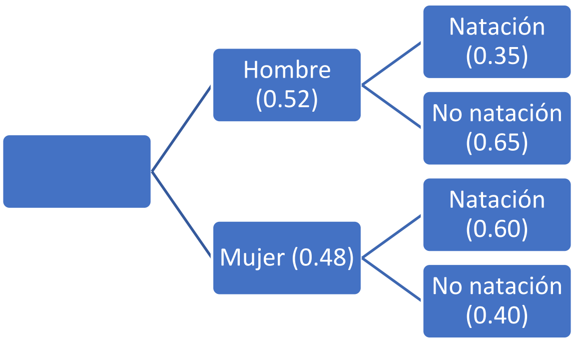
b. $P(A_1 \cap B_{11}) = P(A_1) \cdot P(B_{11}/A_1) = 0.3 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = 0.175$

c. Utilizaremos el complementario "ninguna bola de B tiene un 2", es decir, todas las bolas contienen un uno.
$1 - P(B_{11}) = 1 - 0.35 = 0.65$

3. En un club deportivo, el 52% de los socios son hombres. Entre los socios, el 35% de los hombres practica la natación, así como el 60% de las mujeres. Si elegimos un socio al azar:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique la natación?
   b) Sabiendo que practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución

Vamos a representar la información en un árbol:



Nombramos los siguientes sucesos:

$H \equiv El\ socio\ elegido\ es\ hombre \quad N \equiv El\ socio\ elegido\ sabe\ nadar$

Los sucesos cumplen las condiciones para poder aplicar el teorema de probabilidad total, pues los sucesos ser hombre / mujer son incompatibles y no hay otra opción (su unión son el espacio muestral).

$$P(N) = P(H)P(N/H) + P(\overline{H})P(N/\overline{H}) = 0.52 \cdot 0.35 + 0.48 \cdot 0.60 = 0.182 + 0.288 = 0.47$$

La segunda cuestión la resolveremos utilizando el teorema de Bayes:

$$P(\overline{H}/N) = \frac{P(\overline{H})P(N/\overline{H})}{P(N)} = \frac{0.48 \cdot 0.60}{0.47} = 0.613$$

4. La probabilidad de romper una galleta al ser envasada es del 1 %. Si en un envase hay 10 galletas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una galleta esté rota debido a la operación de envasado?

Solución

El problema se ajusta a una distribución binomial donde el número de repeticiones es 10 y la probabilidad de éxito (la galleta está rota) es 0.01. Nótese que una galleta se rompa es independiente de si una de las anteriores se ha roto o no.

Definimos pues la variable $X \equiv Número\ de\ galletas\ rotas\ en\ un\ evase$, teniendo en cuenta que la distribución es $B(10; 0.01)$ nos piden la siguiente probabilidad $P(X \geq 1)$. Realizaremos el cálculo utilizando el complementario, pues es mucho más fácil:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.01^0 \cdot 0.99^{10} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.99^{10} = 1 - 0{,}904 = 0.096$$

5. Una universidad pública recibe 800 solicitudes de acceso para uno de los grados en los que la oferta de plazas se reduce a 120. Sabiendo que la nota final de un solicitante, después de las pruebas de acceso sigue una distribución normal de media 7´3 y desviación típica 0´7, calcula la nota mínima para obtener una de las plazas ofertadas.

Solución

La distribución a utilizar es $N(7.3; 0.7)$, la probabilidad de ser admitido es ${}^{120}/_{800} = 0.15$. La variable aleatoria X está definida como nota final del solicitante, por lo que nos piden es "cual es la nota a partir de la cual la probabilidad tiene por valor 0.15", es decir:

$$P(X \geq k) = 0.15\ ;\ tipificando\ P\left(Z \geq \frac{k - 7.3}{0.7}\right) = 0.15$$

Para poder utilizar los valores de la tabla de la distribución normal acumulada inferior:

$$0.15 = P\left(Z \geq \frac{k - 7.3}{0.7}\right) = 1 - P\left(Z \geq \frac{k - 7.3}{0.7}\right)\ por\ tanto\ P\left(Z \geq \frac{k - 7.3}{0.7}\right) = 0.85$$

El valor de la tabla cuya probabilidad se corresponde con 0.85 está entre 1,03 y 1,04, tomaremos el valor 1,03. Por tanto:

$$\frac{k - 7.3}{0.7} = 1{,}03\ ;\ k - 7.3 = \ 0.721\ ;\ k = 8.021$$

Por tanto, la nota mínima debe ser de 8.021

6. La duración (en años) de la placa base de los ordenadores sigue una distribución normal de parámetros μ = 10, σ = 2 . Calcula la probabilidad de que una placa base dure más de 12 años

Solución

$$P(X \geq 12) = P\left(Z \geq \frac{12 - 10}{2}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$