1. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A \cap B) = 0{,}3 \qquad p(A \cap \bar{B}) = 0{,}2 \qquad p(B) = 0{,}7$$

Calculad:

$$p(A \cup B)$$
$$p(B \,/\, \bar{A})$$

Solución

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + 0.7 - 0.3$

Debemos pues calcular P(A):

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)\,;\ 0.2 = P(A) - 0.3\,; P(A) = 0.5$

Sustituyendo en la primera expresión:

$P(A \cup B) = P(A) + 0.7 - 0.3 = 0.5 + 0.7 - 0.3 = 0.9$

Para calcular la segunda cuestión:

$P(B/\bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.3 = 0.4$

2. La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es ¾ y, de ellos, la cuarta parte va en transporte público. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:
   a. Un trabajador elegido al azar vaya al trabajo en transporte público.
   b. Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.
   c. Si un trabajador ha llegado a su puesto de trabajo en transporte público, lo haya hecho puntual.

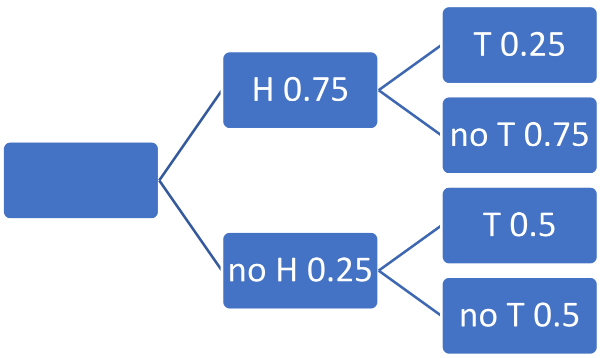
Solución

En primer lugar vamos a definir los sucesos que utilizaremos para resolver el problema:

$H \equiv El\ trabajador\ llega\ en\ hora\ al\ trabajo$

$T \equiv El\ trabajador\ utiliza\ el\ transporte\ público$

Representaremos la información en forma de árbol:



Para el primer apartado utilizaremos el teorema de probabilidad total:

$P(T) = P(H)P(T/H) + P(\overline{H})P(T/\overline{H}) = 0.75 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot 0.5 = 0.1875 + 0.125 = 0.3125$

Para el segundo apartado utilizamos la fórmula de la probabilidad condicionada

$P(\overline{H} \cap T) = P(T/\overline{H})P(T) = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125$

Para el último apartado utilizaremos el teorema de Bayes

$$P(H/T) = \frac{P(H)P(T/H)}{P(T)} = \frac{0.75 \cdot 0.25}{0.3125} = 0.6$$

3. La probabilidad de que, en un cierto mes, un cliente de una gran superficie compre un producto A es 0,6; la probabilidad de que compre un producto B es 0,5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre un producto B no habiendo comprado el producto A es 0,4.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado solo el producto B?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los dos productos?

    Solución

    Definimos los siguientes sucesos:

    $$A \equiv Comprar\ el\ produto\ A\ \ ; B \equiv Comprar\ el\ produto\ B$$

    Los datos son: $P(A) = 0.6\,; P(B) = 0.5\,; P(B/\bar{A}) = 0.4$

    Si solo ha comprado el producto B:

    $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.5 - P(A \cap B)$ (expresión i)

    Por tanto, habrá que calcular la probabilidad de la intersección:

    $$0.4 = P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{0.6} = \frac{0.5 - P(A \cap B)}{0.6}$$

    Queda la ecuación $\frac{0.5-P(A \cap B)}{0.6} = 0.4\,; 0.5 - P(A \cap B) = 0.24\,;\ P(A \cap B) = 0.26$

    Volviendo a la expresión (i)

    $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.5 - P(A \cap B) = 0.5 - 0.26 = 0.24$

    La segunda pregunta puede traducirse como $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, utilizaremos las leyes de Morgan:

    $$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) = 1 - (0.6 + 0.5 - 0.26) = 0.16$$

4. El 10 % de los huevos de un supermercado están rotos. Halla la probabilidad de que un cliente que compra media docena de huevos encuentre como mucho un huevo roto.

    Solución

    Este problema puede resolverse utilizando una distribución binomial, asociando éxito a “elegir un huevo roto” con probabilidad 0.1. Como compra 6 huevos, el experimento se repite 6 veces. Sea X la variable aleatoria “número de huevos rotos”, habrá que calcular la siguiente probabilidad:

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{6}{0}0.1^0 \cdot 0.9^6 + \binom{6}{1}0.1^1 \cdot 0.9^5 = 1 \cdot 0.9^6 + 6 \cdot 0.1 \cdot 0.9^5 = 0.531 + 0.354 = 0.885$

5. El coeficiente intelectual de los individuos presentes en una sala puede suponerse que sigue una distribución normal de media μ y varianza igual a 81. ¿Cuánto vale μ si sabemos que sólo un 10% de las personas en la sala sobrepasa un coeficiente intelectual de 105?

   Solución

   Sabemos que $P(X > 105) = 0.1$, tipificando $P\left(Z > \frac{105-\mu}{9}\right) = 0.1$

   Como la tabla que manejamos es la correspondiente a la acumulada inferior, tendremos que calcular:

   $0.1 = P\left(Z > \frac{105-\mu}{9}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{105-\mu}{9}\right)$ es decir $P\left(Z < \frac{105-\mu}{9}\right) = 0.9$

   Buscamos el valor que corresponde a una probabilidad de 0.9 en la tabla. Este valor se encuentra entre 1.28 y 1.29. Tomaremos el valor 1.28 para realizar los cálculos:

$$\frac{105-\mu}{9} = 1.28\,;\, 105-\mu = 11.52\,;\; \mu = 93.48$$

6. La duración (en años) de la placa base de los ordenadores sigue una distribución normal de parámetros μ = 10, σ = 2 . Calcula la probabilidad de que una placa base dure más de 12 años.

Solución

$$\boldsymbol{P(X \geq 12) = P\left(Z \geq \frac{12-10}{2}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587}$$