1. El gasto por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con media μ euros (desconocida) y desviación típica σ = 10 euros. Se elige una muestra representativa de 225 clientes, resultando una suma total de sus gastos de 2587.50 euros.
   a. Determina un intervalo de confianza del 99% para el gasto medio por cliente.
   b. Calcula el tamaño mínimo de la muestra de clientes que permita alcanzar, con una confianza del 95%, un error máximo de 1.20 euros en la estimación del gasto medio por cliente.

   Solución

   a) Sabemos que $\boldsymbol{\sigma = 10}$; $\boldsymbol{n = 225}$; $\overline{\boldsymbol{x}} = 2587.50$

   El intervalo de confianza viene dado por

$$\boldsymbol{IC} = \left(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{Z}_{\alpha/2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}, \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Z}_{\alpha/2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \right)$$

   Sabemos que $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\right) = \frac{\mathbf{1+0.99}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0.995}$ buscando en la tabla $\boldsymbol{Z}_{\alpha/2} = \mathbf{2,576}$

   Por tanto, el intervalo buscado es:

$$\mathrm{IC} = \left(2587.50 - 2{,}576 \frac{10}{\sqrt{225}}, 2587.50 + 2{,}576 \frac{10}{\sqrt{225}} \right) = (2585{,}77; 2589{,}22)$$

   b) Para un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}$:

   $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\right) = \frac{\mathbf{1+0.95}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0.975}$ buscando en la tabla $\boldsymbol{Z}_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$

   El error es la mitad de la amplitud del intervalo:

$$\boldsymbol{Z}_{\alpha/2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \leq \mathbf{1,20}$$

   Despejando:

$$1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{\mathrm{n}}} \leq 1{,}20 \ ; \mathrm{n} \geq \left(\frac{1{,}96 \cdot 10}{1{,}20} \right)^2 \ ; \mathrm{n} \geq 266{,}77 \ ; \mathrm{n} = 267 \ (\text{tamaño mínimo})$$

2. En un almacén hay 300 cerraduras del modelo A, 400 del modelo B, 100 del modelo C y 200 del modelo D. La probabilidad de que una cerradura se bloquee es 0.04 si es del modelo A, 0.02 si es del modelo B, 0.05 si es del modelo C y 0.03 si es del modelo D. Se toma una cerradura al azar:
   a. Calcule la probabilidad de que la cerradura se bloquee.
   b. Sabiendo que la cerradura se ha bloqueado, calcule la probabilidad de que no sea del modelo B.

   a) Vamos a utilizar la siguiente notación:

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{La\ cerradura\ seleccionada\ es\ del\ modelo\ A}$$
$$\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{La\ cerradura\ seleccionada\ es\ del\ modelo\ B}$$
$$\boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{La\ cerradura\ seleccionada\ es\ del\ modelo\ C}$$
$$\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{La\ cerradura\ seleccionada\ es\ del\ modelo\ D}$$

   Para resolver el problema podemos utilizar el teorema de probabilidad total, pues la unión de los anteriores sucesos es todo el espacio muestral (no se puede elegir una cerradura que no sea de los anteriores tipos) y los sucesos son mutuamente excluyente (sólo se puede elegir una de un único modelo).

   Las probabilidades asignadas a los anteriores sucesos son:

$$P(A)=\frac{300}{1000}=0,3; P(B)=\frac{400}{1000}=0,4; P(C)=\frac{100}{1000}=0,1; P(D)=\frac{200}{1000}=0,2$$

Sea el suceso: $E \equiv \boldsymbol{La\ cerradura\ se\ bloquea}$. La información que proporciona el enunciado es:

$$P(E/A)=0.04\ ;\ P(E/B)=0.02; P(E/C)=0.05\ ; P(E/D)=0.03$$

Por tanto:

$$P(E)=P(A)P(E/A)+P(B)P(E/B)+P(C)P(E/C)+P(D)P(E/D)$$
$$P(E)=0.3\cdot 0.04+0.4\cdot 0.02+0.1\cdot 0.05+0.2\cdot 0.03=0,031$$

b) La probabilidad pedida es:

$$P(\overline{B}/E)=\frac{P(A)P(E/A)+P(C)P(E/C)+P(D)P(E/D)}{P(E)}$$
$$=\frac{0.3\cdot 0.04+0.1\cdot 0.05+0.2\cdot 0.03}{0,031}==0,74$$

3. En una urna hay 2 bolas rojas, 4 bolas blancas y 5 bolas negras. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:
   c. La probabilidad de que las dos sean rojas.
   d. La probabilidad de que sean de distinto color.
   e. La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.
   f. Sea A el suceso "la primera bola extraída es roja" y B el suceso "las dos bolas son del mismo color", ¿son los dos sucesos A y B independientes?

Solución

a) Definimos los siguientes sucesos:

$$R_1 \equiv \boldsymbol{La\ primera\ bola\ es\ roja}\ \ R_2 \equiv \boldsymbol{La\ segunda\ bola\ es\ roja}$$
$$P(R_1\cap R_2)=P(R_1)P(R_2/R_1)=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{55}$$

b) Es más fácil calcular el complementario, es decir, que ambas sean del mismo color:

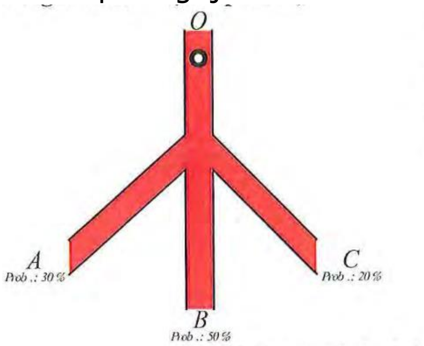
$$P(\boldsymbol{sean\ de\ disntinto\ color})=1-P(\boldsymbol{sean\ del\ mismo\ color})$$
$$P\big((R_1\cap R_2)\cup(B_1\cap B_2)\cup(N_1\cap N_2)\big)$$
$$=P(R_1\cap R_2)+P(B_1\cap B_2)+P(N_1\cap N_2)=$$
$$=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}+\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}=0,31$$

La probabilidad pedida es $P(\boldsymbol{sean\ de\ distinto\ color})=1-0,31=0,69$

c) $P(R_2)=P(R_1)P(R_2/R_1)+P(B_1)P(R_2/B_1)+P(N_1)P(R_2/N_1)=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}+\frac{4}{11}\cdot\frac{2}{10}+\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{10}=0,18$

d) $P(R_1)=\frac{2}{11}$; $P(\boldsymbol{sean\ del\ mismo\ color})=0,31$. La probabilidad de la intersección se corresponde con $P(R_1\cap R_2)=0,018\ \neq P(R_1)\cdot P(\boldsymbol{sean\ del\ mismo\ color})=0,491\cdot 0.31=0.1522$. Por tanto, no son independientes.

4. En un dispositivo como el de la figura adjunta, una canica que se lanza desde el punto O sale por A con una probabilidad del 30%, por B con una probabilidad del 50% y por C con una probabilidad del 20%. Tras tres lanzamientos, calcular:
   g. La probabilidad de que la canica haya salido por C en algún lanzamiento
   h. La probabilidad de que en los tres lanzamientos la canica haya salido por agujeros distintos.



Solución

a) Para resolver este problema vamos a utilizar el suceso complementario "La canica no ha salido por C en ninguno de los lanzamientos", posteriormente restaremos a 1 el resultado calculado. También hay que señalar que cada uno de los lanzamientos es independiente del anterior.
   Utilizaremos la siguiente notación: ACB indicará que la primera canica salió por A, la segunda por C y la tercera por B.

$$\boldsymbol{P(Ninguna\ sale\ por\ C) = P(AAA \cup AAB \cup ABA \cup BAA \cup BBB \cup ABB \cup BAB \cup BBA) =}$$

$$\boldsymbol{= P(AAA) + P(AAB) + P(ABA) + P(BAA) + P(BBB) + P(ABB) + P(BAB) + P(BBA) =}$$

$$\boldsymbol{= 0.3^3 + 0,3^2 \cdot 0.5 + 0,3^2 \cdot 0.5 + 0,3^2 \cdot 0.5 + 0.5^3 + 0.5^2 \cdot 0.3 + 0.5^2 \cdot 0.3 + 0.5^2 \cdot 0.3 =}$$

$$\boldsymbol{= 0.3^3 + 0,3^2 \cdot 0.5 + 0,3^2 \cdot 0.5 + 0,3^2 \cdot 0.5 + 0.5^3 + 0.5^2 \cdot 0.3 + 0.5^2 \cdot 0.3 + 0.5^2 \cdot 0.3 =}$$

$$\boldsymbol{= 0.3^3 + 3 \cdot 0,3^2 \cdot 0.5 + 0.5^3 + 3 \cdot 0.5^2 \cdot 0.3 = 0,512}$$

$$\boldsymbol{P(\text{la canica ha salido por C en algún lanzamiento}) = 1 - P(Ninguna\ sale\ por\ C) = 1 - 0,512 = 0,488}$$

b) $\boldsymbol{P(\text{la canica sale por distinto lugar}) = P(ABC \cup ACB \cup BAC \cup BCA \cup CAB \cup CBA) =}$

$$\boldsymbol{= P(ABC) + P(ACB) + P(BAC) + P(BCA) + P(CAB) + P(CBA) =}$$

$$\boldsymbol{= 6 \cdot 0.3 \cdot 0,5 \cdot 0,2 = 0,18}$$

1. El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.
   i. Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90% para la media del peso.
   j. ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es (156.4, 163.6)?

Solución

a) Sabemos que $\boldsymbol{\sigma = 25}$; $\boldsymbol{n = 121}$; $\boldsymbol{\overline{x} = 150}$

El intervalo de confianza viene dado por

$$IC = \left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sabemos que $P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = \frac{1+0.9}{2} = \mathbf{0.95}$ buscando en la tabla $Z\alpha 2$=1,645

Por tanto, el intervalo buscado es:

$$IC = \left(150 - 1,645\frac{25}{\sqrt{121}}, 150 + 1,645\frac{25}{\sqrt{121}}\right) = (146,262; 153,739)$$

b) Para un nivel de confianza del 85% obtenemos el valor de $Z_{\alpha/2}$:

$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = \frac{1+0.85}{2} = \mathbf{0.925}$ buscando en la tabla $Z_{\alpha/2} = \mathbf{1,44}$

Como conocemos el intervalo de confianza, la media coincide con la media de los extremos:

$$\overline{x} = \frac{156,4 + 163,6}{2} = 160$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo:

$$Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{163,6 - 156,4}{2} = 3,6$$

Sustituyendo y despejando:

$$Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3,6 \,;\, 1,44\frac{25}{\sqrt{n}} = 3,6 \,;\, \sqrt{n} = \frac{1,44 \cdot 25}{3,6} \,;\, n = 100$$

2. En un laboratorio se ensaya en tres grupos de 100 ratones con tres tipos de
bacterias (A, B y C) que pueden causar neumonía. A los ratones del primer grupo se
les inocula la bacteria A y el 40% contraen neumonía, al segundo grupo la bacteria B
y el 60% contraen neumonía y al tercer grupo la bacteria C y el 25% contraen neumonía. Después del experimento, se elige un ratón al azar.
   a. Calcula la probabilidad de que el ratón haya contraído una neumonía.
   b. Si el ratón ha contraído la neumonía, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo de ratones al que se le ha inoculado la bacteria de tipo B.

Solución

a. Nombramos en primer lugar los sucesos que vamos a manejar:

$$A \equiv El\ ensayo\ se\ ha\ realizado\ con\ el\ tipo\ de\ bacteria\ A$$
$$B \equiv El\ ensayo\ se\ ha\ realizado\ con\ el\ tipo\ de\ bacteria\ B$$
$$C \equiv El\ ensayo\ se\ ha\ realizado\ con\ el\ tipo\ de\ bacteria\ C$$

Como la población de cada uno de los ensayos es la misma, la probabilidad de seleccionar un ratón al que se ha inoculado un tipo de bacteria es la misma, es decir $1/3$.
Para resolver la primera cuestión podemos utilizar el teorema de probabilidad total, pues a un ratón únicamente se le ha inoculado un tipo de bacteria.
Sea el suceso

$$M \equiv El\ ratón\ seleccionado\ ha\ contraido\ neumonía$$
$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}4 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}25 = 0.42$$

b. Este apartado lo resolveremos utilizando el teorema de Bayes:

$$P(B/M) = \frac{P(B)P(M/B)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}6}{0{,}42} = 0{,}476$$

3. En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:
   a. La probabilidad de que las dos sean rojas.
   b. La probabilidad de que sean de distinto color.
   c. La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.
   d. Sea A el suceso "la primera bola extraída es roja" y B el suceso "las dos bolas son del mismo color", ¿son los dos sucesos A y B independientes?

Solución

a) Definimos los siguientes sucesos:

$$\boldsymbol{R_1 \equiv La\ primera\ bola\ es\ roja \quad R_2 \equiv La\ segunda\ bola\ es\ roja}$$
$$\boldsymbol{P(\,R_1 \cap\ R_2) = P(\,R_1)P(\,R_2/\,R_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{20}{110}} = \frac{2}{11}$$

b) Es más fácil calcular el complementario, es decir, que ambas sean del mismo color:

$$\boldsymbol{P(sean\ de\ disntinto\ color) = 1 - P(sean\ del\ mismo\ color)}$$
$$\boldsymbol{P\big((\,R_1 \cap\ R_2) \cup (\,B_1 \cap\ B_2) \cup (\,N_1 \cap\ N_2)\big)}$$
$$\boldsymbol{= P(R_1 \cap\ R_2) + P(B_1 \cap\ B_2) + P(N_1 \cap\ N_2) =}$$
$$\boldsymbol{= \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}31}$$

La probabilidad pedida es $\boldsymbol{P(sean\ de\ disntinto\ color) = 1 - 0{,}31 = 0{,}69}$

c) $\boldsymbol{P(R_2) = P(R_1)P(R_2/R_1) + P(B_1)P(R_2/B_1) + P(N_1)P(R_2/N_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} = 0{,}4545}$

d) $\boldsymbol{P(R_1) = \frac{2}{11}}$; $\boldsymbol{P(sean\ del\ mismo\ color) = 0{,}69}$. La probabilidad de la intersección se corresponde con $\boldsymbol{P(\,R_1 \cap\ R_2) = 0{,}18\ \neq P(R_1) \cdot P(sean\ del\ mismo\ color) = \frac{2}{11} \cdot 0{,}69 = 0{,}125}$. Por tanto, no son independientes.