

Límites y continuidad de funciones

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

i. $f(x) = -2x^3 + 4x - \frac{1}{2}$

ii. $f(x) = \frac{3x^4 - 1}{-3}$

iii. $f(x) = \frac{-2x^3 + 5x + 1}{-3x + 3}$

iv. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4}$

v. $f(x) = \sqrt{4x - 2}$

vi. $f(x) = x \cdot 5^x$

vii. $f(x) = \log x^2$

2. Representa y calcula el recorrido de las siguientes funciones:

i. $f(x) = \frac{x + 4}{2}$

ii. $f(x) = x^2 + x + 1$

iii. $f(x) = \sqrt{3x}$

iv. $f(x) = \frac{5}{x - 1}$

3. Encuentra los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

i. $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 5)$

ii. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

iii. $f(x) = (x^2 - 1)2^x$

iv. $f(x) = \log(x + 1)$

4. Calcula los puntos de corte con el eje de abscisas (OX), el dominio y el signo de:

i. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

ii. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$

iii. $f(x) = (x - 2) \cdot e^x$

5. Calcula, razonando la respuesta, los límites de las siguientes funciones:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 - x + 1) =$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 1) =$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^2 + 2) =$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 1}{x - 2} =$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{2x + 4} =$

vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 2}{x} =$

vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} =$

viii. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x + 1) =$

ix. $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^4 - x^2 + 2) =$

x. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x + 1) =$

xi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + 4x + 1) =$

xii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 2x) =$

6. Calcula los límites de las siguientes funciones racionales:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} =$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} =$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^3 + 8x}{x^2 - 4} =$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 + 2x^2 - 13x + 10} =$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3}{x^4 - 3x^2 + 2x} =$

vi. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} =$

vii. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + x - 2} =$

viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 3x - 1}{x^4 - 2} =$

ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 2x + 1}{2x^3 + 2x - 3} =$

x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 + 2x^2 + 3x - 2}{3x^3 + 5} =$

xi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 6}{-2x^2 - x} =$

xii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{-5x} =$

xiii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{-2x^2 - x + 1} =$

xiv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 4x^2 + x - 2}{-2x^3 + 2x - 6} =$

7. Calcula los siguientes límites:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)^2-1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{x^2-x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+3x}{x^2-x}$

v. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x}{x^2-x}$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{2x+5}$

vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{x+5}$

viii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

ix. $\lim_{x \rightarrow -9} \frac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}$

x. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

xi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-x}{x+5}$

xii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 5\sqrt{x})$

xiii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-2x+1}$

$$\text{xiv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$\text{xv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 9}$$

$$\text{xvi. } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x}$$

$$\text{xvii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x}$$

$$\text{xviii. } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$$

$$\text{xix. } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$$

$$\text{xx. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3x} - \frac{3}{2x+1} \right)$$

$$\text{xxi. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\text{xxii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{x+1} \right)$$

$$\text{xxiii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2-x)(8x-3)}{(2x-1)^2} \right)$$

$$\text{xxiv. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+5} - \sqrt{x})$$

$$\text{xxv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 13)$$

$$\text{xxvi. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2+7x+1}{(2x+1)(1-4x)}$$

$$\text{xxvii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$\text{xxviii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 7x - 5}}{2x - 9}$$

$$\text{xxix. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{4x^2 + 3x})$$

8. Representar las siguientes funciones definidas a trozos:

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x, & \text{si } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x - 2 & \text{si } x \in [2, 4] \\ 5 & \text{si } x \in (4, \infty) \end{cases}$$

$$\text{iv. } f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{v. } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -5 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{vi. } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in (-\infty, 1] \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$\text{vii. } f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{4}{x-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{viii. } f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \in (-\infty, 2] \\ x^2 - 4x & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

$$\text{ix. } f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-5} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{10}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

9. Dadas las siguientes funciones esbozar su representación gráfica y expresarla de forma analítica por ramas:

i. $f(x) = |-3x + 3|$

ii. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

iii. $f(x) = |x + 1|$

iv. $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

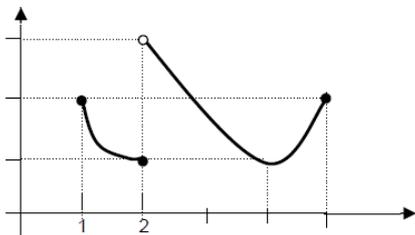
v. $f(x) = |3x + 6|$

vi. $f(x) = |x + 1|$

vii. $f(x) = \left| \frac{1}{2}x^2 - x - 4 \right|$

viii. $f(x) = |-x^2 - 4x - 5|$

10. Teniendo en cuenta la gráfica de la función de la imagen indicar si existe $\lim f(x)$ para los siguientes casos $x \rightarrow 1, x \rightarrow 2, x \rightarrow 4, x \rightarrow 5$:



11. Representar la función $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ y calcular $\lim f(x)$ cuando $x \rightarrow 1, x \rightarrow 3, x \rightarrow 5$.

12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ bx^3 - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ calculad los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en $x = 1$ y $x = 2$.

13. Estudia la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no ser continuas, determina los puntos de discontinuidad y el tipo.

i. $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 1 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{iii. } f(x) = \frac{3x - 3}{x^2 - 1}$$

$$\text{iv. } f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$$

14. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

$$\text{a. } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$\text{b. } f(x) = \frac{2x^3}{x^3 - 1}$$

$$\text{c. } f(x) = \log_2(x - 2)$$

$$\text{d. } f(x) = e^{2x}$$

15. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$, calcula el dominio, los puntos de corte y los puntos de discontinuidad. Determina las ecuaciones de las asíntotas y representálas.

16. Sea $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x < 1 \\ (x+a)^2 & x \geq 1 \end{cases}$, ¿para qué valores del parámetro a de la función es continua?.

17. Una empresa de alquiler de coches nos ofrece la posibilidad de escoger entre dos tarifas:

20 € por día mas 0,4 € por kilómetro recorrido

40 € por día.

- i. Para cada una de las dos tarifas, expresa el coste del alquiler en función del número t , de días de duración del viaje y del kilometraje, x .
- ii. Si debemos hacer 1000 km en 8 días, ¿qué tarifa nos conviene? ¿Y si el viaje de 1000 km debe durar 12 días?.
- iii. Si debemos hacer 1000 km, ¿para qué duración del viaje el coste es el mismo con las dos tarifas?. Explica qué tarifa nos interesa en función del número de días que dure el viaje.

18. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1}$, se pide que calcules los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$, las asíntotas, los puntos de corte con los ejes y que hagas un dibujo aproximado de su gráfica.

19. Determina la función polinómica de segundo grado cuya gráfica pasa por los puntos $(1,-1)$, $(-1,5)$ y $(0,0)$. Dibújala aproximadamente.

20. Las ganancias y las pérdidas $f(x)$, en decenas de miles de euros, de una empresa fundada hace dos años siguen la evolución siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2 & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{3x}{2x+4} & x > -1 \end{cases}$$

Donde x representa el número de años transcurridos y en la que entendemos que $x=0$ como el momento actual.

- Representa gráficamente la función $f(x)$ y estudia la continuidad.
- Indica el momento en el que las pérdidas de la empresa han sido mayores y la situación económica actual de la empresa.

21. Una sustancia se elimina del cuerpo según la ley $y(t) = y_0 e^{-at}$, donde $y(t)$ es la concentración en la sangre en el instante t horas e y_0 es la concentración inicial.

- Indica las propiedades de la función exponencial relacionadas con el producto, el cociente y la potenciación.
- Determina la constante a y el tiempo que tardará la concentración en bajar hasta el 10% inicial sabiendo que para $t=1$ la concentración era de 1gr/l y que para $t=2$ había bajado hasta 0,9 gr/l.

22. La cotización en bolsa de las acciones de una empresa siguió durante 1991, aproximadamente, la siguiente evolución $f(t) = 34239t - 3t^2$. Donde t es el tiempo en meses $0 \leq t \leq 12$.

- Dibuja la gráfica de la función $f(t)$.
- ¿En que mes se alcanzó la cotización máxima?. Calcula el porcentaje de beneficio que habría que obtenido un individuo si hubiese comprado acciones en el momento de mínima cotización y las hubiese vendido en el de máxima.

23. Representa la función $y = 2^x$. Indica las propiedades mas importantes de las funciones exponenciales.

24. Calcula la ecuación de una parábola que pase por los puntos $(0,0)$, $(4,4)$ y $(1,-2)$.

25. Las tarifas de taxi de una ciudad indican que bajar bandera cuesta 15€ y con este importe podemos recorrer hasta 500m. A partir de este momento, el taxímetro salta 1,5€ y vuelve a saltar 1,5€ por cada 20m recorridos. Suponiendo que el taxi no se pare en todo el viaje:

- Dibuja la función que nos da el precio y que debemos pagar por cada viaje de x metros, para x entre 0 y 600 m.
- ¿Cuántos euros hemos pagado por un viaje de 585 m?. ¿Qué intervalo de distancias podemos haber recorrido si hemos pagado 19,5 €?.