Matrices

1. Dada la matriz *A*, encuentra la matriz *X* para que se verifique $A+X=O$, siendo O la matriz nula de dimensiones 3x3.
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Efectúa el producto *A·B* con las matrices de los siguientes apartados:
   a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
   b) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$
   c) $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$
   d) $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
   e) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
   f) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
   g) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
   h) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

3. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{x} \\ x & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{C}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
   a) Encontrar el valor o valores de *x* de tal forma que $B^2=A$
   b) Determinar la matriz *X* para que $X \cdot A = A + I_2$

4. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ calculad $A^{-1} \cdot \left(B - A^t\right)$

5. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix}$$

Calculad los valores de los números reales *x, y,z* para que se verifique la siguiente igualdad de matrices.

$$E-x\cdot A\cdot B=y\cdot C+z\cdot D$$

6. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&2\\-5&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}$. Explicad que dimensiones tiene que tener la matriz *X* para que la ecuación matricial $X\cdot A+2B=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}$ tenga sentido. Resolver dicha ecuación.

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\2&a&0\\-1&0&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}a^2&0&0\\4a&a^2&0\\1-a&0&1\end{pmatrix}$, con *a* un parámetro real no nulo, comprobad que $A^{-1}\cdot B=A$.

8. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&20\\16&5\end{pmatrix}$. Calculad *X* de la ecuación matricial $A^2X=B$.

9. Encontrar una matriz *X* que verifique: $X-B^2=A\cdot B$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&1\\0&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&2\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

10. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\\-1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$. Calculad:

   a) C + AB

   b) $C^{-1}+(AB)^{-1}$

   c) $(C+AB)^{-1}$

11. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&3\\1&-3\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}3&1\\-6&2\end{pmatrix}$$

   a) A + B + C
   b) 2A - 3B - C
   c) A·B + C
   d) A·B·C

12. Calculad los valores *a, b, c* y *d* para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2a & 3 \\ 4+a & 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & c-1 \\ -2c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

13. Dadas las siguientes matrices, calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

a) A + B + C
b) A/2 + B
c) (A – C) / 3
d) A · B
e) B · C
f) A · B · C

14. Dada la matriz *A*, realiza las siguientes operaciones $A^2 y A^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Dadas las matrices *A* y *B*, efectúa las siguientes operaciones:

$$A \cdot B, A^t \cdot B, B^t \cdot B, A^t \cdot B^t$$

16. Calcula la matriz A^{25} a partir de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

17. A partir de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $A^2 y A^3$

b) $A^4 y A^5$

c) $A^8 y A^9$

d) A^{15}

18. Calcula la inversa de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

h) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

i) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

19. Calcula los siguientes determinantes:

a) $|A|=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$

b) $|B|=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$

c) $|C|=\begin{vmatrix} -20 & 10 \\ 12 & 8 \end{vmatrix}$

d) $|D|=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

20. Calcula los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

d) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

21. Calcula los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -8 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

d) $|D| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

22. Calculad la matriz inversa de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$

23. Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices

a) $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -5 & 4\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 5 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & -5 & 0\end{pmatrix}$

24. Calcula la matriz inversa por el método de los determinantes:

a) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ -1 & 5 & 3\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -3\\ -5 & -2 & 0\\ -4 & 0 & -1\end{pmatrix}$

c) $D=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\ 6 & 4 & 7\\ 5 & 2 & 8\end{pmatrix}$

25. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\begin{vmatrix}x+1 & x-4\\ 6 & x+3\end{vmatrix}=17$

b) $\begin{vmatrix}x & x-2\\ x-1 & x+1\end{vmatrix}=10$

26. Dadas las siguientes matrices, resuelve las ecuaciones que se plantean:

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

a) $AX=B$
b) $XB=C$
c) $CX=A+B$
d) $AX=BC$

27. Dadas las siguientes matrices, resuelve las ecuaciones matriciales de los apartados siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

a) $AX=B+C$
b) $(AC)-B=X$
c) $ABX=C$
d) $ABX=I$

28. Dadas las siguientes matrices, resuelve las ecuaciones matriciales cuando sea posible. De lo contrario, razónalo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $AX=B$
b) $BX=C$
c) $BC=AX$

29. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $AX=B$
b) $BX=C$
c) $ABX=I$
d) $A=BX$
e) $B=CX$

30. Calculad el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

f) $F=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

g) $G=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

h) $H=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

i) $J=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

j) $K=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

31. Calcula el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro ***m***.

a) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{m} & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ m & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ 2 & 3 & m \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix}$

32. Se considera el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a+1)z = 2a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real a

b) Resuélvase el sistema para *a = 3*.

Nota: Los valores para los que se anula el determinante de la matriz asociada al sistema son 0 y 1. La solución para *a=3* es $x = \frac{5}{2}; y = -\frac{1}{2}; z = \frac{1}{2}$

33. Se considera el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} x - 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real a

b) Resuélvase el sistema para *a = 1*.

Nota: El valor para el que se anula el determinante de la matriz asociada al sistema es 1. La solución para *a=1* es $x = 1 - t; y = t; z = t$

34. Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del dinero en euros.

Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

Nota: la solución contiene los valores 165.000, 75.000 y 11.000.

35. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Comprobad que A es la matriz inversa de B

b) Calculad la matriz $(A-2I)^2$

c) Calcúlese la matriz X tal que AX = B.

36. Se considera el sistema lineal: $\begin{cases} mx+my=6 \\ x+(m-1)y=3 \end{cases}$

a) Discutir el sistema según el valor del parámetro *m*.

b) Resolved el sistema para *m=2.*

Nota: Los valores para los que se anula el determinante de la matriz asociada al sistema son 0 y 2. La solución para m=*2* es $x=3-t; y=t$.

37. Se considera el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real a

b) Resuélvase el sistema para *a = -1*.

Nota: Los valores para los que se anula el determinante de la matriz asociada al sistema son 1 y -2. La solución para *a=-1* es $x=0; y=1; z=0$

38. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a) Determinar si son inversibles estas matrices, y de serlo, calculadlas

b) Determinar la matriz *X* tal que *XA-B=2I*, siendo *I* la matriz identidad de orden 3.

c) Calculad A^{86}

Nota: A es inversible mientras que B no. La matriz del apartado *c* es igual a la matriz inversa de *A*.

39. Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C. Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.

    Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

    Nota: Los valores que aparecen 25, 50 y 60.