MATRICES

Operaciones

Definición

Si ***m*** y ***n*** son dos números enteros positivos, una matriz de m x n, es una estructura ordenada en ***m*** filas y ***n*** columnas, cuyos elementos se identifican por el número de fila y columna que ocupa:

$$\textbf{\textit{m filas}} \quad \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn-1} & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\textbf{\textit{n columnas}}} \right.$$

Orden de una matriz

Se entiende por orden de una matriz, el número de filas y de columnas (en este orden) que componen la matriz.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

El orden de esta matriz es 3 x 2 (tres filas por dos columnas)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El orden de esta matriz es 2 x 2 (dos filas por dos columnas)

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El orden de esta matriz es 3 x 1 (tres filas por una columna)

Notación

- Para hacer referencia a una matriz se utilizará una letra mayúscula, también podremos utilizar una expresión del tipo (a_{ij})
- Para indicar un elemento de la matriz de posición la fila ***i*** y la columna ***j*** utilizaremos una letra minúscula con dos sub-índices, el primero se corresponderá con la fila y el segundo con la columna que ocupa el elemento.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1$

$a_{21} = -3$

$a_{32} = 2$

Cuando deseamos hacer referencia a un elemento genérico de la matriz utilizaremos el elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$ elemento de la fila ***i*** y de columna ***j***.

Igualdad de matrices

Dos matrices A= (a_{ij}) y B= (b_{ij}) son iguales si sus órdenes son iguales y cada uno de los elementos de cada una de las posiciones de las matrices son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ y $\forall j \in \{1, \dots, m\}$ siendo *n x m* el orden de ambas matrices.

Ejemplo: ¿cuánto deben valer x e y para que ambas matrices sean iguales?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ x & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ y B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & y & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

Puesto que ambas matrices tienen igual orden, entonces *x* que ocupa la segunda fila primera columna debe tener el valor del elemento que ocupa igual lugar en *B*, esto es **0** e *y* debe tener, por análogo motivo, el valor 1.

Suma de matrices

La suma de dos matrices A= (a_{ij}) y B= (b_{ij}) con igual orden, es otra matriz del mismo orden, obtenida de la siguiente forma:

A+B=$(a_{ij}+b_{ij})$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ siendo *n x m* el orden de las matrices.

La suma de matrices de distinto orden no está definida.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2-5 \\ 0+5 & 0+6 \\ -1+10 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Rango 3x2 Rango 3x2 Rango 3x2

Producto de un escalar por una matriz

El producto de un escalar (número real) ***k*** por una matriz A= (a_{ij}), es otra matriz del mismo orden, obtenida de la siguiente forma:

k·A=k $\cdot\, (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij}) \forall i \ \in \{1, \dots, n\}\ y\ \forall j \ \in \{1, \dots, m\}$ siendo *n x m* el orden de la matriz.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \ k = 2 \ \ ;$$

$$k \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 12 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices y el producto por un escalar

Si *A*, *B* y *C* son matrices de orden mxn y *k* y *s* son números reales, las siguientes propiedades son ciertas:

- Propiedad conmutativa de la suma de matrices: $A + B = B + A$
- Propiedad asociativa de la suma de matrices: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Propiedad asociativa respecto del producto escalar: $(\mathrm{k} \cdot \mathrm{s}) \cdot A = k \cdot (s \cdot A)$
- Propiedad identidad respecto del producto escalar: $1 \cdot A = A$
- Propiedad distributiva respecto de la suma de matrices:

$$\mathrm{k} \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

- Propiedad distributiva respecto de la suma de escalares:

$$(\mathrm{k} + \mathrm{s}) \cdot A = k \cdot A + s \cdot A$$

Ejemplo: resolución de una ecuación matricial

Resolved la ecuación matricial **2X - A = B** siendo $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

$$2X - A = B, por\ tanto, 2X = B + A \Rightarrow X = \frac{1}{2}(B + A)$$

$$X = \frac{1}{2}(B + A) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1/2 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

El producto de dos matrices *A*= $\left(a_{ij}\right)$ de orden ***nxm*** y *B*= $\left(b_{ij}\right)$ con orden ***mxp***, es otra matriz de orden ***nxp***, obtenida de la siguiente forma:

A·*B*=$\left(c_{ij}\right)$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\forall j \in \{1, \ldots, p\}$ donde cada elemento se ha construido de la siguiente forma:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{im} \cdot b_{mj}$$

Importante:

- no es posible multiplicar cualesquiera dos matrices, la primera de ellas debe tener el mismo número de columnas que de filas la segunda matriz.
- La matriz producto tendrá tantas filas como la primera matriz y tantas columnas como la segunda matriz.

Ejemplo I (producto de matrices)

Cálculo del producto de A y B: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + 6 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 6 \cdot 4 \\ -1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 24 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

3x2 **2x2** $\longrightarrow$ **3x2**

Ejemplo II (producto de matrices)

Cálculo del producto de A y B: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0+0 & 0-8+0 \\ -2+0+6 & 0-4+12 \\ -6+0+8 & 0+8+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 8 \\ 2 & 24 \end{pmatrix}$$

3x3 3x2 → 3x2

Propiedades del producto de matrices

Sean ***A***, ***B*** y ***C*** matrices y ***k*** un número real, entonces:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (propiedad asociativa)
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (propiedad distributiva por la izquierda)
3. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ (propiedad distributiva por la derecha)
4. $k \cdot (B \cdot C) = (k \cdot B) \cdot C = B \cdot (k \cdot C)$ (propiedad asociativa del producto por un escalar)

Matriz traspuesta

La traspuesta de una matriz A de orden **mxn** es una matriz de orden **nxm** que se forma a partir de aquella al intercambiar las filas por las columnas de forma ordenada.

La traspuesta de una matriz se notará por $\boldsymbol{A^t}$.

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz traspuesta

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t \quad \forall k \in \mathbb{R}$
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
5. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Matriz identidad

La matriz identidad de orden n x n (siempre debe ser cuadrada) es una matriz compuesta de ceros, salvo los elementos de su diagonal, que deben ser 1.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Importante

La matriz identidad únicamente tiene sentido para matrices cuadradas

Notaremos por $\boldsymbol{I_n}$ a la matriz identidad de orden n. Cuando se sobreentienda la dimensión se denotará únicamente por ***I.***

Si ***A*** es una matriz cuadrada de orden n, entonces $\boldsymbol{A \cdot I_n = I_n \cdot A = A}$

Matriz inversa

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de orden n x n, y sea $\boldsymbol{I_n}$ la matriz identidad de orden n x n. Si existe una matriz $\boldsymbol{A^{-1}}$ tal que:

$$\boldsymbol{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n}$$

Entonces $\boldsymbol{A^{-1}}$ se denomina la inversa de $\boldsymbol{A}$.

¿Es A la matriz inversa de B? $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, ambas matrices son inversas

Un método para el cálculo de la matriz inversa I

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, podemos calcular la matriz inversa utilizando un sistema lineal de ecuaciones:

La matriz inversa debe ser cuadrada de orden 2x2, por tanto, tendrá esta forma: $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y debe cumplir que:

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto, resulta:

$\begin{pmatrix} a+4b & c+4d \\ -a-3b & -c-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que utilizando la igualdad de matrices proporciona dos sistemas lineales (continúa…)

Un método para el cálculo de la matriz inversa II

El problema queda reducido entonces a resolver dos sistemas de ecuaciones lineales (tened en cuenta las columnas de la anterior expresión):

$$\begin{cases} a + 4b = 1 \\ -a - 3b = 0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} c + 4d = 0 \\ -c - 3d = 1 \end{cases}$$

Resolviendo: $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Nótese, que las matrices ampliadas de los anteriores sistemas únicamente se diferencian en la columna correspondiente a los términos independientes y ésta se corresponde con cada una de las columnas de la matriz identidad. Este hecho, proporciona el siguiente algoritmo para el cálculo de la matriz inversa.

Cálculo de la matriz inversa

Sea ***A*** la matriz de orden *n x n*, para calcular su inversa procederemos de la siguiente forma:

1. Adjuntamos las matrices ***A*** e $\boldsymbol{I_n}$ siendo ésta la matriz identidad de orden n. Se formará una matriz de orden *n x 2n* siendo las n primeras columnas las de la matriz ***A*** y las n últimas columnas las de la matriz identidad.

2. Si es posible, mediante operaciones elementales de filas, convertir la matriz ***A*** en $\boldsymbol{I_n}$, en las posiciones donde se encuentra la matriz $\boldsymbol{I_n}$ obtendremos la inversa de ***A***.

3. *Comprobad el resultado.*

Ejemplo I

Cálculo de la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: Adjuntamos las matrices *A* e I_n:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicamos operaciones elementales de fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Operaciones realizadas por fila

$-F_1+F_3 \longrightarrow F_3$

$-F_2+2F_3 \longrightarrow F_2$

$2F_2+F_3+2F_1 \longrightarrow F_1$

Resultado $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo II

Cálculo de la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: Adjuntamos las matrices *A* e I_n:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos operaciones elementales de fila:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones realizadas por fila

$-3F_2+F_1 \longrightarrow F_1$

$-3F_3+F_1 \longrightarrow F_3$

Resultado: A^{-1} *no existe pues la tercera fila está compuesta de ceros y no sirve para alcanzar la matriz identidad.*

Representación de un sistema lineal

Todo sistema lineal de ***n*** ecuaciones y ***m*** incógnitas se puede representar como una ecuación matricial, así, el producto de la matriz de coeficientes de orden ***nxm***, por una matriz columna de ***m*** filas será igual a la matriz columna de ***n*** filas.

Ejemplo:

El sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas:
$$\begin{cases} x + 2y - z + 4t = 1 \\ x + y + \quad 3t = 0 \\ 3x \quad + z + 7t = 2 \end{cases}$$

Puede ser representado por la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución de sistemas utilizando A^{-1}

Si un sistema lineal dispone de ***n ecuaciones y n incógnitas***, y la matriz de coeficientes es ***invertible*** (existe su matriz inversa lo que equivale a decir que el sistema tiene una única solución), entonces se puede resolver el sistema de la siguiente forma:

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, siendo *A* la matriz de coeficientes (orden *nxn*), *X* la matriz columna de incógnitas (orden *nx1*) y *B* la matriz columna (orden *nx1*) de términos independientes.

Ejemplo I

Resolved el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad\;\; y + 2z = -1 \\ x - 2y \qquad\; = 2 \end{cases}$

Solución: Representamos el sistema como una ecuación matricial ***AX=B***, donde:

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Calculamos $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y resolvemos: $X = A^{-1}B$, quedando:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Siendo la solución *x=8; y=3;z=1*

CLASIFICACIÓN DE MATRICES

Según su forma o dimensión

Matriz fila: consta de una sóla fila. Ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz columna: consta de una sóla columna. Ejemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Matriz cuadrada: tiene igual número de filas que de columnas. Ejemplo $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Matriz rectangular: tiene igual distinto número de filas que de columnas.

Ejemplo $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Según sus elementos I

Matriz nula: Todos sus elementos son cero. Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz diagonal: Matriz cuadrada cuyos elementos que no se encuentran en la diagonal principal son cero. Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Matriz unidad: Matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son todos 1.

Ejemplo : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Según sus elementos II

Matriz triangular superior: Matriz cuadrada cuyos elementos por debajo de la diagonal son cero: Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Matriz triangular inferior: Matriz cuadrada cuyos elementos por encima de la diagonal son cero: Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$