Semana del 28/02/22 al 06/03/22

1. El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con deviación típica 0,4 años:
   a. Si se toma una muestra aleatoria de 600 usuarios y se obtiene que el tiempo medio de renovación de sus teléfonos fue de 1,8 años, construye a partir de dicha muestra un intervalo de confianza para el tiempo medio de renovación, al 90 %.
   b. ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio de renovación a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,03 años y un nivel de confianza del 90%?

Solución

Para resolver el primer apartado utilizaremos la distribución normal: $N\left(1.8; \frac{0.4}{\sqrt{600}}\right)$; $N(1.8; 0.016)$.

Recordemos como se construía el intervalo de confianza:

$$\boldsymbol{IC} = \left(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}_{/2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}, \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}_{/2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \right)$$

Recordando la definición de $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}_{/2}$, $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}_{/2}\right) = \frac{\mathbf{1}+(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{2}} = \frac{1+0.9}{2} = 0.95$

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}_{/2}\right) = 0.95 \text{ ; buscando en la tabla } \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}_{/2} = 1{,}645$$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza:

$$\mathbf{IC} = (\, 1.8 - 1.645 \cdot 0.016,; 1.8 - 1.645 \cdot 0.016) = (\mathbf{1{,}77}; \mathbf{1{,}826})$$

El error cometido es $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}_{/2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$, por tanto, $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}_{/2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \leq 0{,}03$; $1{,}645 \frac{0{,}4}{\sqrt{\mathrm{n}}} \leq 0{,}03$

Despejando:

$\sqrt{\mathrm{n}} \leq \frac{0{,}4}{1{,}645}$; $\sqrt{\mathrm{n}} \geq \frac{1{,}645 \cdot 0{,}4}{0{,}03} \approx 21{,}93$

Por tanto, habrán de seleccionarse al menos 22 muestras.

2. Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?

Solución

Vamos a definir en primer lugar las variables de decisión:

$$x \equiv \text{Número de camiones parta llevar agua potable}$$

$$y \equiv \text{Número de camiones parta llevar medicamentos}$$

A continuación, traduciremos las restricciones en forma de inecuaciones:

"con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones"

$$x + y \leq 27$$

"Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones"

$$x \geq 12$$

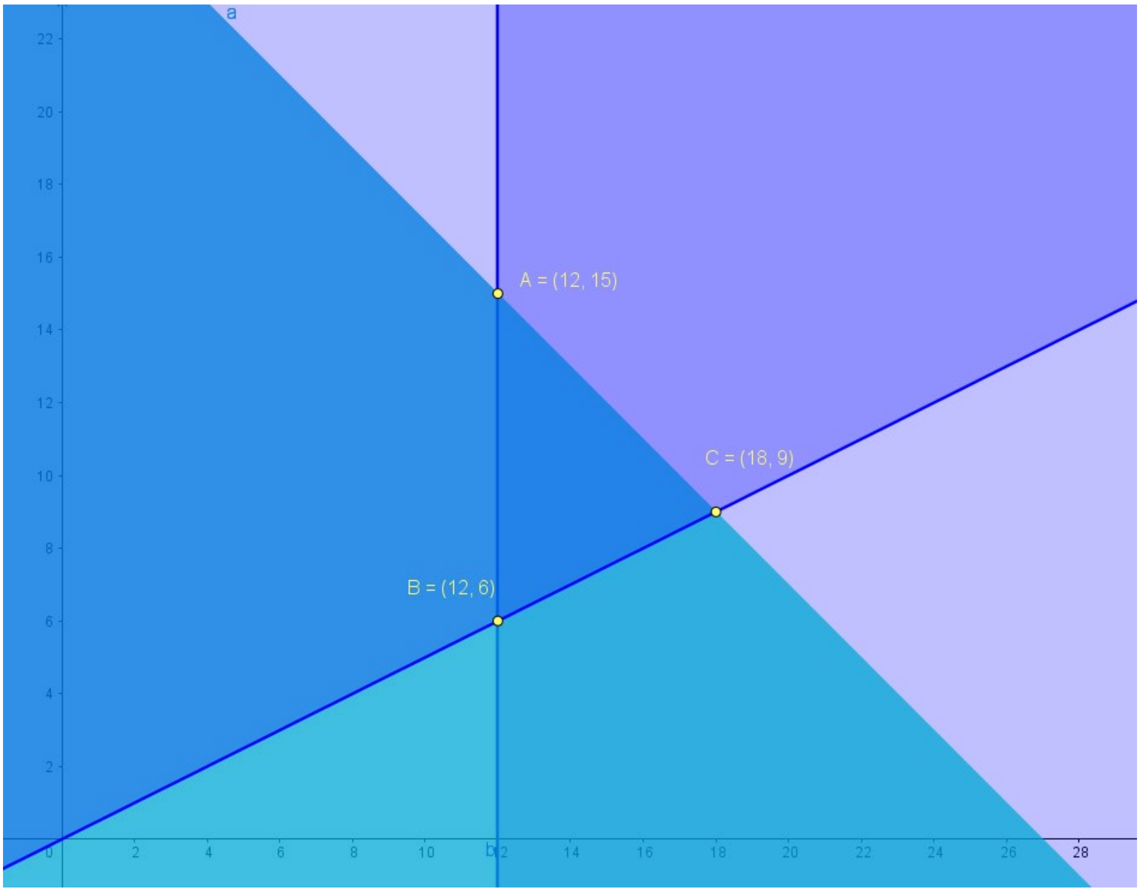
"para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua"

$$y \geq \frac{x}{2}$$

Incluimos las restricciones $x \geq 0$; $y \geq 0$

La función objetivo es: $F(x, y) \equiv 9000x + 6000y$

Representamos la región factible:



El mínimo se alcanza en los vértices de la región factible. Evaluemos la función objetivo en cada uno de los puntos:

$$F(12,15) \equiv 9000 \cdot 12 + 6000 \cdot 15 = 198000$$

$$F(12,6) \equiv 9000 \cdot 12 + 6000 \cdot 6 = 144000$$

$$F(18,9) \equiv 9000 \cdot 18 + 6000 \cdot 9 = 216000$$

Por tanto, la solución óptima consiste en enviar 12 camiones con agua potable y 6 con medicamentos, siendo el coste de 144.000 euros.

3. Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+y-az=1 \\ x+2y-2z=-2 \end{cases}$$

a. Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.
b. Resolver el sistema para a = 1

Solución

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes en función del parámetro a:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+2a-4+2a+1 = 4a-5$$

$$4a-5 = 0\ ;\ a = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Por tanto:

Caso 1: $a \neq \frac{5}{4}$

El rango de la matriz de coeficientes es tres, al igual que el rango de la matriz ampliada. Por el teorema de Roché-Fröbenius el sistema es compatible, como el rango coincide con el número de incógnitas y ecuaciones, es compatible.

Caso 2: $a = \frac{5}{4} = 1{,}25$

El rango de la matriz de coeficientes es dos: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3 \neq 0$

Calculemos el rango de la matriz ampliada, utilizaremos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1{,}25 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1-F_2 \to F_2 \\ F_1-F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2{,}25 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4F_2-3F_3 \to F_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 3. Como la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen distinto rango, por el teorema de Roché-Fröbenius el sistema es incompatible.

Por el estudio anterior, sabemos que para a=1 el sistema es compatible determinado, por lo que podemos utilizar la regla de Cramer para resolver el sistema. Como en el denominador de las expresiones para el cálculo de cada variable necesitamos el valor del determinante de la matriz de coeficientes podemos calcularla $|A| = 4 \cdot 1-5 = -1$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-1} = 6$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-9}{-1} = 9$$