Semana del 07/03/22 al 13/03/22

1. Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35 % de vino blanco, un 40 % de vino de crianza y un 25 % de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5 % para el vino blanco, 4 % para el crianza y 2 % para el reserva.
   a. Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado?
   b. Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado?

Solución

Vamos en primer lugar a definir los sucesos que utilizaremos para resolver el problema:

$B \equiv Vino\ blanco\ ;\ C \equiv Vino\ de\ crianza\ ;\ R \equiv Vino\ de\ reserva$

$E \equiv El\ vino\ se\ ha\ estropeado$

El suceso E es un suceso dependiente del tipo de vino. Las probabilidades asignadas a cada suceso son:

$$P(B) = 0.35\ ;\ P(C) = 0.4\ ;\ P(R) = 0.25$$

$$P(E/B) = 0.05\ ;\ P(E/C) = 0.04\ ;\ P(E/R) = 0.02$$

Para resolver el primer apartado utilizaremos el teorema de probabilidad total:

$$P(E) = P(B)P(E/B) + P(C)P(E/C) + P(R)P(E/R)$$
$$= 0.35 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0{,}04 + 0{,}025 \cdot 0.02 = 0{,}0385$$

La probabilidad que hay que calcular en la segunda pregunta se puede expresar de la siguiente forma: $P(\bar{E}/C \cup R)$. Podemos calcular esta probabilidad utilizando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(\bar{E}/C \cup R) = \frac{P\big((C \cup R) \cap \bar{E}\big)}{P(C \cup R)} = \frac{P(C \cap \bar{E}) + P(R \cap \bar{E})}{P(C) + P(R)} =$$

$$= \frac{P(C)P(\bar{E}/C) + P(R)P(\bar{E}/R)}{0{,}4 + 0{,}25} = \frac{0{,}4 \cdot 0.96 + 0{,}25 \cdot 0{,}98}{0{,}65} = \frac{0{,}629}{0{,}65} = 0{,}967$$

2. Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.
   a. Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería probabilidad de que el peso promedio de 100 bolas superase los 168 gr?
   b. El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 95 % de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina.

Solución

Para resolver el primer apartado utilizaremos la distribución de probabilidad $N\left(165; \frac{20}{\sqrt{100}}\right)$; $N(165; 2)$.

La probabilidad pedida es:

$$P(X > 168) = P\left(Z > \frac{168 - 165}{2}\right) = P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0{,}9932$$
$$= 0{,}0068$$

Para resolver el primer apartado utilizaremos la distribución normal: $N(165; 2)$.

Recordemos como se construía el intervalo de confianza:

$$\boldsymbol{IC = (\,\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$$

Recordando la definición de $\boldsymbol{Z_{\alpha/2}}, \boldsymbol{P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right)} = \frac{\boldsymbol{1+(1-\alpha)}}{\boldsymbol{2}} = \frac{1+0.95}{2} = 0.975$

$$\boldsymbol{P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right)} = 0.975\;;\; buscando\ en\ la\ tabla\ \boldsymbol{Z_{\alpha/2}} = 1{,}96$$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza:

$$\mathrm{IC} = (\,165 - 1.96 \cdot 2; 165 + 1.96 \cdot 2) = (161{,}08; 168{,}92)$$

3. Discute el siguiente sistema en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+ay=1 \\ 2x-ay+2az=5 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$$

Resuelve el sistema si a=1.

Solución

Comenzaremos calculando el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -a & 2a \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5a+2a+2a^2 = 2a^2-3a$$

Calculamos los valores de a que anulan el determinante resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$2a^2-3a=0\,;\ a(2a-3)=0\,;\begin{cases} a=0 \\ 2a-3=0\,;\ a=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Ahora realizamos el estudio para cada uno de los valores:

Caso 1: Si $a \neq 0$ y $a \neq \frac{3}{2}$

El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, por tanto, el rango de la matriz de coeficientes es 3, el rango de la matriz ampliada también es tres, al ser iguales, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible. Como el número de incógnitas, ecuaciones y rango coinciden, es determinado.

Caso 2: $a=0$

La matriz de coeficientes queda $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, el rango de la matriz es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$.

Calculemos el rango de la matriz ampliada:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ tomando el menor de orden 3 formado por la primera, tercera y cuarta columna $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot(5-2) = -9 \neq 0$ observamos que es distinto de cero. Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 3. Como el rango de la matriz de coeficientes es distinto del rango de la matriz ampliada, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible.

Caso 3: $a=\frac{3}{2}$

La matriz de coeficientes queda $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, el rango de la matriz es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -\frac{9}{2} \neq 0$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada por el método de Gauss:

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Para poder realizar los cálculos mejor, sustituiremos la primera y segunda fila por ella misma multiplicada por 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2F_1\text{-}F_2 \to F_2 \\ F_1\text{-}2F_3 \to F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} F_2 + 3F_3 \to F_3$$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Por tanto, el rango de la matriz ampliada también es 2, por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible. Al ser menor el rango que el número de incógnitas es indeterminado.

Para resolver el sistema para a=1, por el estudio anteriormente realizado, sabemos que el sistema es compatible determinado. Podemos utilizar tanto el método de Gauss como la regla de Cramer. Utilizaremos ésta última para variar:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x - ay + 2az = 5; \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes que forma parte del denominador de la solución es:

$$|A| = 2a^2 - 3a \; ; \; 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 2\text{-}3 = \text{-}1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3$$