Semana del 14/03/22 al 20/03/22

1. Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo

Solución

Definimos en primer lugar las variables de decisión, para poder expresar las restricciones asociadas al problema:

$$x \equiv \text{Hectáreas cultivadas de trigo } y \equiv \text{Hectáreas cultivadas de cebada}$$

*"Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros"*. Con la información contenida en este párrafo podemos definir la función objetivo:

$$F(x, y) = 200x + 60y$$

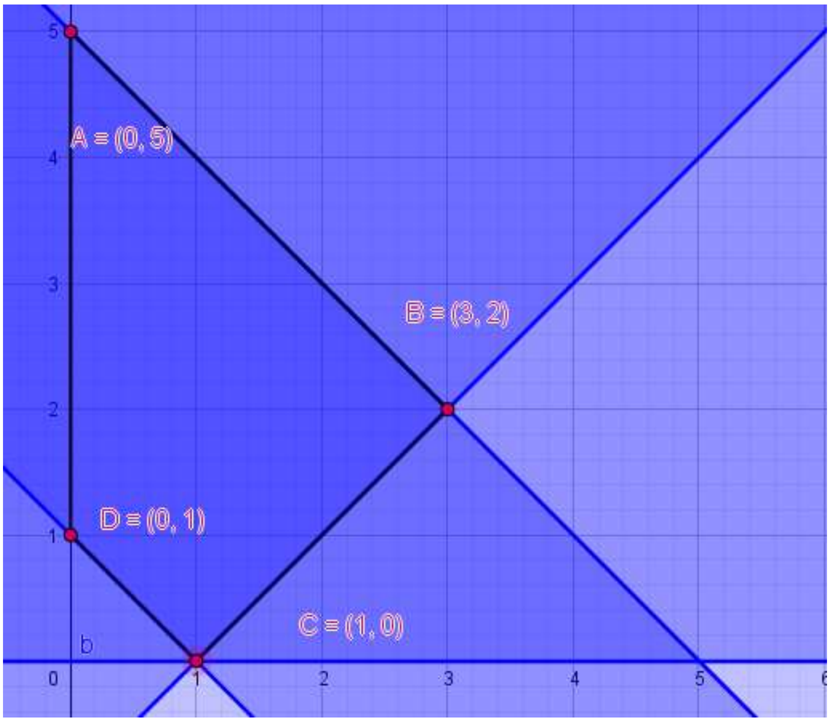
Vayamos ahora con las restricciones, que delimitarán la región *factible:*

*"Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada"* $x + y \leq 5$

*"Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea"*. $x + y \geq 1$

*"la normativa autonómica obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada"*. $x \leq y + 1$

Incluimos las restricciones: $x \geq 0$ $y \geq 0$




Recordando que la función alcanza su máximo en los vértices de la región factible (se han calculado como intersección de las rectas asociadas a las inecuaciones), evaluamos la función:

$\mathrm{A}(0,5)\ F(0,5) = 200 \cdot 0 + 60 \cdot 5 = 300$

$\mathrm{B}(3,2)\ F(3,2) = 200 \cdot 3 + 60 \cdot 2 = 720$

$\mathrm{C}(1,0)\ F(1,0) = 200 \cdot 1 + 60 \cdot 0 = 200$

$\mathrm{D}(0,1)\ F(0,5) = 200 \cdot 0 + 60 \cdot 1 = 60$

Por tanto, el beneficio máximo se alcanza cuando se plantan 3 hectáreas de trigo y 2 de cebada, siendo el beneficio de 720 €.

2. Discute el siguiente sistema en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2a - 1 \\ 2x + y + az = 1 \\ x + ay + 1z = 1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema si a=0.

Solución

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes para poder calcular, dependiendo del valor del parámetro el rango de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 1\text{-}a^2\text{-}2 + a + 2a\text{-}1 = \text{-}a^2 + 3a\text{-}2$$

$$-a^2+3a-2=0;\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2}=\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$$

Caso 1; $x\neq 1 \text{ y } x\neq 2$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, el rango de la matriz es tres, que coincide con el rango de la matriz ampliada, por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible. Al ser el rango igual que el número de incógnitas y ecuaciones el sistema es determinado.

Caso 2; $x=1$

La matriz de coeficientes queda:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix};\ \begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0 \text{ el rango es } 2$$

La matriz ampliada queda:

$$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Como la columna de términos independientes es igual que la segunda y tercera columna, el rango de la matriz ampliada también es 2, por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible. Al ser el rango menor que el número de incógnitas y ecuaciones el sistema es indeterminado.

Caso 2; $x=2$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix};\ \begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=4-1=3\neq 0 \text{ el rango es } 2$$

La matriz ampliada es:

$$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&1&2&1\\1&2&1&1\end{pmatrix}$$

Formamos el menor por la primera, segunda y cuarta columna:

$$\begin{vmatrix}1&1&3\\2&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=-1-1+9=7\neq 0$$

Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, al tener distinto grado, el sistema es incompatible:

Por el estudio anterior, cuando a=0 el sistema es compatible determinado. Podemos utilizar el método de Gauss o la regla de Cramer, entre otros, para resolver el sistema. En esta ocasión utilizaremos la regla de Cramer. El determinante de la matriz de coeficientes es -2 (hemos sustituido en la expresión algebraica del inicio).

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

3. En un mercado agropecuario el 70% de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30% de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:
    a. Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.
    b. Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

Solución

Definimos los siguientes sucesos:

$$D \equiv \text{Las verduras son de proximidad};\ E \equiv \text{Las verduras son ecológicas}$$

La probabilidad de que una verdura sea ecológica depende de si es de proximidad o no. Teniendo en cuenta la anterior afirmación, podemos asignar las siguientes probabilidades:

$$P(D) = 0.7\ ;\ P(\overline{D}) = 0.3\ ;\ P(E/D) = 0.3\ ;\ P(E/\overline{D}) = 0.1$$

Podemos deducir de las anteriores: $P(\overline{E}/D) = 0.7\ ;\ P(\overline{E}/\overline{D}) = 0.9$

Para la primera pregunta utilizaremos el teorema de probabilidad total:

$$P(\overline{E}) = P(D) \cdot P(\overline{E}/D) + P(\overline{D}) \cdot P(\overline{E}/\overline{D}) = 0.7 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.76$$

Para responder a la segunda pregunta utilizaremos la fórmula de la unión junto con la fórmula de la probabilidad condicionada, teniendo en cuenta que el suceso E depende del suceso D:

$$\begin{aligned} P(D \cup E) &= P(D) + P(E) - P(D \cap E) = 0.7 + 0.24 - P(E/D) \cdot P(D) \\ &= 0.7 + 0.24 - 0.3 \cdot 0.7 = 0.73 \end{aligned}$$