Semana del 21/03/22 al 27/03/22

1. Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

   a. Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$

   b. Para a = b = c = 2, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución

Formamos las matrices:

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2a & 1 & 0\\ 2b+ac & 2c & 1\end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a-1 & 1 & 0\\ b-1 & c-1 & 1\end{pmatrix}$$

Igualando cada una de las componentes de la matriz aparece el siguiente sistema:

$$\begin{cases}2a = a-1\,;\; a=-1\\ 2b+ac = b-1\\ 2c = c-1\,;\; c=-1\end{cases}$$

Sustituyendo los valores de a y c, obtenemos el valor de b:

$2b + (-1)(-1) = b - 1\,;\; b = -2$

Para contestar el segundo apartado necesitamos calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \; por\ tanto\ tiene\ inversa.$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica σ = 10 horas.
   a. Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95% para μ.
   b. Suponga que μ = 28 kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral $\bar{x}$ esté entre 28 y 30 kilómetros.

Solución

Como ya es costumbre recordamos la distribución a utilizar, $N\left(30; \frac{10}{\sqrt{20}}\right)$

Recordemos también, la fórmula para el intervalo de confianza:

$$\boldsymbol{IC} = (\,\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}, \bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}})$$

Sabemos que $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\right) = \frac{\mathbf{1+0.95}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0.975}$ buscando en la tabla $\boldsymbol{Z}_{\alpha/2} =$ 1,96

Sustituimos:

$$\boldsymbol{IC} = (30 - 1.96\frac{10}{\sqrt{20}}, 30 + 1.96\frac{10}{\sqrt{20}}) = (25.62; 34.38)$$

En esta ocasión, la distribución a utilizar es $N\left(28; \frac{10}{\sqrt{10}}\right)$. Expresamos la probabilidad que nos piden:

$$\mathrm{P}(28 < \mathrm{X} < 30) = \mathrm{P}\left(\frac{28\text{-}28}{10/\sqrt{10}} < \mathrm{Z} < \frac{30\text{-}28}{10/\sqrt{10}}\right) = \mathrm{P}(0 < \mathrm{Z} < 0{,}6325) =$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} < 0.6325)\text{-}\mathrm{P}(\mathrm{Z} < 0) = 0{,}7357\text{-}0{,}5 = 0{,}2357$$

3. Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C) = 0.4\,;\ P(D) = 0.6\ y\ P(C \cup D) = 0.8$. Calculad:

   a. $P(C/D)$

   b. $P(\overline{C \cap D}/C)$

Solución

Para calcular $P(C/D)$, necesitamos calcular la probabilidad de la intersección de sucesos, ésta la calcularemos gracias a la fórmula de la unión:

$$\mathrm{P(C \cup D) = P(C) + P(D)\text{-}P(C \cap D)\ ;\ 0.8 = 0.4 + 0.6\text{-}P(C \cap D)\ ;\ P(C \cap D) = 0.2}$$

Por tanto, $P(C/D) = \frac{\mathrm{P(C \cap D)}}{\mathrm{P(D)}} = \frac{0{,}2}{0.6} = \frac{1}{3}$

Para realizar el cálculo del segundo apartado:

$$P(\overline{C \cap D}/C) = 1\text{-}\mathrm{P(C \cap D/C)} = 1\text{-}\frac{\mathrm{P(C \cap D \cap C)}}{\mathrm{P(C)}} = 1\text{-}\frac{\mathrm{P(C \cap D)}}{\mathrm{P(C)}} = 1\text{-}\frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}$$