Semana del 28/03/22 al 03/04/22

1. El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:
    a. No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
    b. No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

Solución

En primer lugar definiremos los siguientes sucesos:

$$\mathrm{T} \equiv \text{El empleado teletrabaja} \; ; \; \mathrm{S} \equiv \text{El empleado padece trastorno del sueño}$$

Asignamos las probabilidades, dándonos cuenta que el suceso S depende de T:

$$P(T) = 0.6 \; ; \; P(\overline{T}) = 0.4; \; P(S/T) = 0.3 \; ; \; P(S/\overline{T}) = 0.8$$

Para responder a la primera pregunta habrá de calcularse:

$$P(T \cap \overline{S}) = P(\overline{S}/T)P(T) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$$

Hemos utilizado la fórmula para el cálculo de probabilidades condicionadas.

Para responder a la segunda pregunta hay que calcular:

$$P(\overline{T}/\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}/\overline{T})P(\overline{T})}{P(\overline{S})} = \frac{0.2 \cdot 0.4}{0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.2} = \frac{0.08}{0.5} = 0.16$$

Hemos utilizado el teorema de Bayes.

2. Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.
    a. Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
    b. Suponiendo que la proporción poblacional es P = 0.5, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

Solución

Hay que tener cuidado a la hora de seleccionar la distribución normal que se utilizará, pues se nos proporcionan el número de éxitos que se producen en una muestra:

$$n = 500\ ;\ p = \frac{320}{500} = 0.64;\ q = 1\text{-}p = 0,36$$

La distribución a utilizar es:

$$N\left(p; \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) = N\left(0.64; \sqrt{\frac{0.64 \cdot 0.36}{500}}\right) = N(0.64; 0.021)$$

También hemos de recordar la fórmula del intervalo de confianza:

$$IC = \left(p\text{ -}Z\alpha_{/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}; p + Z\alpha_{/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

El único dato que nos falta para el cálculo del intervalo de confianza es calcular $Z\alpha_{/2}$:

$$P(Z \leq Z_\alpha) = \frac{1 + 0.96}{2} = 0.98$$

Buscando en la tabla de la distribución Normal: $Z\alpha_{/2} = 2.055$

Sustituyendo:

$$IC = (0.64\text{-}2.055 \cdot 0.021; 0.64 + 2.055 \cdot 0.021) = (0{,}596; 0{,}683)$$

La condición puede expresarse por: $Z\alpha_{/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \leq 0.05$

Sustituimos los valores que conocemos $Z\alpha_{/2} \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \leq 0.05$

Calculamos $P(Z \leq Z_\alpha) = \frac{1+0.95}{2} = 0.975\ Z\alpha_{/2} = 1.96$

Sustituyendo: $1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \leq 0.05\ ;\ \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \leq \frac{0.05}{1{,}96}\ ;\ \frac{0.25}{n} \leq \left(\frac{0.05}{1{,}96}\right)^2;$

$$\frac{0.25}{n} \leq 6.5 \cdot 10^4\ ;\ n \geq \frac{0{,}25}{6.5 \cdot 10^{-4}} = 384.61 \text{ por tanto n mayor o igual que } 385$$

3. Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Solución

Se trata de un problema de programación lineal. Comenzaremos definiendo las variables de decisión:

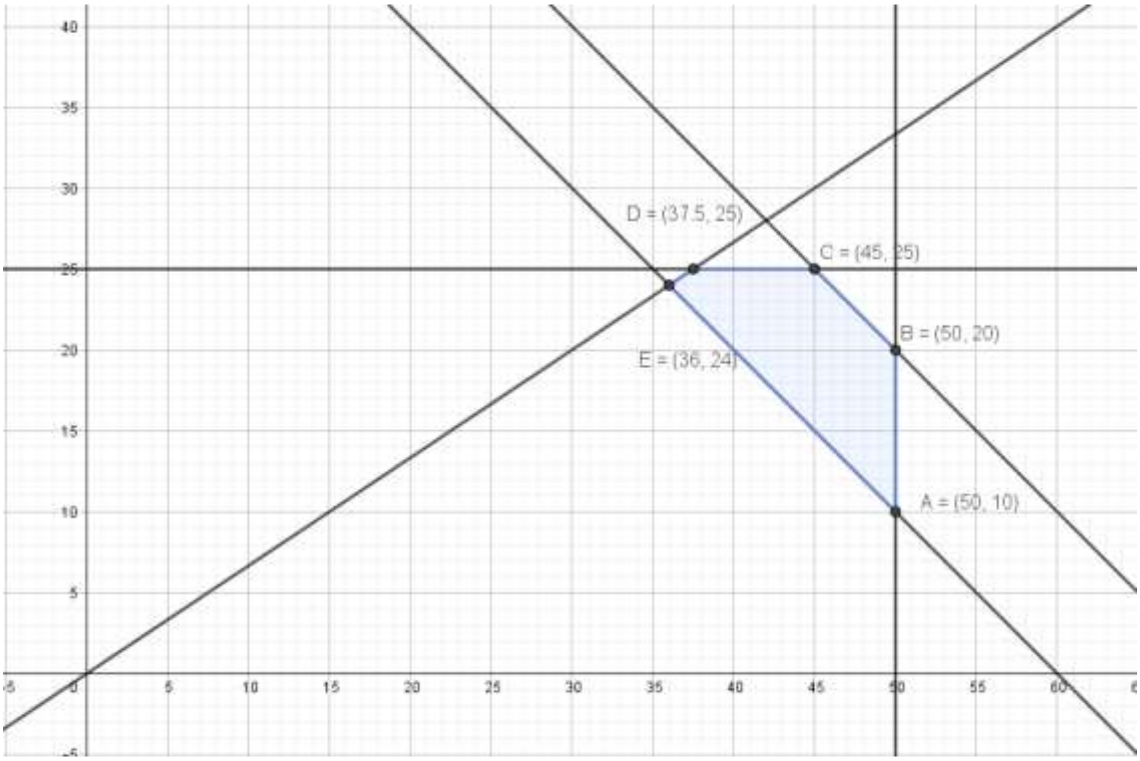
$$x \equiv \text{kilos de almendras} \ y \equiv \text{kilos de avellanas}$$

Vayamos con las restricciones, que definirán la región factible:

$$x \leq 50 \ ; \ y \leq \ 25 \ ; \ x \geq 1.5y \ ; \ x + y \geq 60 \ ; \ x + y \leq 70$$

La función objetivo que habrá que maximizar es:

$$F(x, y) \equiv x + 2y$$



Los valores óptimos se alcanzan entre los vértices de la región factible, es decir, en los puntos:

$$A(50{,}10), B(50{,}20), C(45{,}25), D(37.5{,}25), E(36{,}24)$$

Evaluamos los valores de estos puntos en la función objetivo:

A $F(50{,}10) = 50 + 2 \cdot 10 = 70$

B $F(50{,}20) = 50 + 2 \cdot 20 = 90$

C $F(45{,}25) = 45 + 2 \cdot 25 = 95$

D $F(37.5{,}25) = 37.5 + 2 \cdot 25 = 87.5$

E $F(36{,}24) = 36 + 2 \cdot 24 = 84$

Por tanto, el valor óptimo se alcanza cuando se utilizan 45 kilos de almendras y 25 de avellanas, siendo el beneficio de 95€.