Semana del 4/04/22 al 10/04/22

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=-1 \\ x-y+a^2z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{array}\right\}$$

   a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
   b) Resuelva el sistema de ecuaciones para a = 1.

Solución

Calculamos el determinante de la matriz de coeficiente, obtendremos una expresión en función del parámetro a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + a^2 - 1 + 2a^2 - 1 = 3a^2 - 3$$

Igualamos a cero el valor del determinante, para conocer el rango de la matriz de coeficientes en función de tales valores:

$$3a^2 - 3 = 0\,;\ 3a^2 = 3\,;\ a^2 = 1\,;\ a = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema en función de los valores obtenidos:

Caso 1: $a \neq 1\ a \neq -1$

El rango de la matriz de coeficientes es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada, por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible. Como el rango coincide con el número de ecuaciones e incógnitas es determinado.

Caso 2: $a = 1$

El rango de la matriz de coeficientes es menor que 3, en concreto es 2, pues el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, es distinto de cero.

Estudiamos el rango de la matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculemos el valor del menor formado por la primera, segunda y cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 3 = 3 \neq 0$$

Por tanto, el rango de la matriz ampliada es tres. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible.

Caso 3: $a = -1$

Este caso es exactamente idéntico al anterior, pues las matrices a estudiar son exactamente iguales, por tanto, el sistema es incompatible.

Resolver la segunda pregunta es muy fácil, por el estudio realizado el sistema en incompatible, y por tanto, no tiene solución.

2. Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A)=0,5 \qquad P(\overline{B}/A)=0,4 \qquad P(A\cup B)=0,9$$

   a) $P(B/\bar{A})$
   b) Determine si son dependientes o independiente los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

Solución

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A\cap B)}{1-0.5}$$

Por tanto, tenemos que calcular la probabilidad de la intersección y la probabilidad de B.

Del segundo dato que nos proporcionan:

$$0.4 = P(\bar{B}/A) = \frac{P(A\cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A\cap B)}{P(\bar{B})} = \frac{0.5 - P(A\cap B)}{1-P(B)}$$

Por tanto, $\frac{0.5-P(A\cap B)}{1-P(B)} = 0.4$

Del tercer dato que nos proporcionan:

$$0.9 = P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.4 + P(B) - P(A\cap B)$$

Por tanto, $0.4 + P(B) - P(A\cap B) = 0.9$

Disponemos, de dos ecuaciones que comparten las dos mismas incógnitas. Resolvemos el sistema:

De la segunda ecuación: $\mathrm{P(B)} = 0.5 + \mathrm{P(A\cap B)}$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\frac{0.5 - \mathrm{P(A\cap B)}}{0.5 + \mathrm{P(A\cap B)}} = 0.4\,;\ 0.5 - \mathrm{P(A\cap B)} = 0.2 + 0.4\,\mathrm{P(A\cap B)}$$

$$0.3 = 1.4\,\mathrm{P(A\cap B)}\,;\ \mathrm{P(A\cap B)} = \frac{0.3}{1.4} = 0.21$$

Sustituyendo en el valor despejado: $\mathrm{P(B)} = 0.5 + 0.21 = 0.71$

Ya podemos calcular $P(\bar{B}/A) = \frac{0.5-0.21}{1-0.71} = 1$

Para resolver la segunda pregunta tendremos que comprobar si la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidad de A y B:

$$P(A)\cdot P(B) = 0.5\cdot 0.71 = 0.355 \neq 0.21 = \mathrm{P(A\cap B)}$$

Por tanto, no son independientes.

3. El tiempo que un autobús urbano tarda en realizar su ruta se ajusta a una distribución normal con media de 24 minutos y desviación típica de 8 minutos. Si cada día el autobús realiza 40 veces su ruta:
   a) Calcular la probabilidad de que en un día el tiempo medio de las 40 rutas esté entre 22 y 27 minutos.
   b) Calcular la probabilidad de que el autobús emplee más de 1080 minutos en total cada día para realizar su ruta esas 40 veces.

Solución

La distribución que utilizaremos será $N\left(24;\frac{8}{\sqrt{40}}\right) = N(24;1.26)$.

La primera pregunta se puede resolver calculando la siguiente expresión:

$$P(22\leq X\leq 27) = P\left(\frac{22-24}{1.26}\leq Z\leq \frac{27-24}{1.26}\right) = P(-1.587\leq Z\leq 2.38) =$$

$$= P(Z\leq 2{,}38) - P(Z\leq -1.587) = 0.6808 - \big(1-P(Z\leq 1.587)\big) =$$

$$= 0{,}9913\ -(1-0{,}9429\ ) = 0{,}9342$$

Para calcular la segunda probabilidad, tendremos en cuenta que es equivalente a calcular que el autobús emplee más de ${}^{1080}/_{40} =$ $27\,minutos$ (la media):

$$P(X>27) = P\left(Z>\frac{27-24}{1.26}\right) = P\left(Z>\frac{3}{1.26}\right) = P(Z>2.38) = 1-P(Z\leq 2.38) =$$

$$= 1-0.9913 = 0.0087$$