Soluciones semana del 6/12/21 al 12/12/21

1. La lista electoral de un determinado partido político está formada por un número igual de hombres y mujeres. Un análisis sociológico de dichas listas revela que el 60% de los hombres tienen 40 o más años de edad, mientras que el 30% de las mujeres tienen menos de 40 años. Se elige al azar una persona que forma parte de las listas electorales.
   a. Calcula la probabilidad de que tenga menos de 40 años.
   b. Sabiendo que tiene 40 o más años de edad, calcula la probabilidad de que sea mujer.

   Solución

   Para resolver este problema utilizaremos el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes.

   Empecemos definiendo los distintos sucesos:

   $\mathrm{H} \equiv \text{Seleccionar un hombre del partido político}$

   $\mathrm{C} \equiv \text{Tener cuarenta años o más}$

   La probabilidad asociada a este suceso es:

   $\mathrm{P(H)} = 0.5 \text{ por tanto } \mathrm{P}(\overline{\mathrm{H}}) = 1\text{-}0.5 = 0.5$

   El suceso C depende del suceso H y las probabilidades asociadas relacionadas con ambos sucesos son:

$$\mathrm{P(C/H)} = 0.6\,; \quad \mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}}/\mathrm{H}) = 0.4\,; \mathrm{P}(\mathrm{C}/\overline{\mathrm{H}}) = 0.7 \;\; ; \; \mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}}/\overline{\mathrm{H}}) = 0.3$$

   El primer apartado lo resolveremos utilizando el teorema de probabilidad total:

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}}) = \mathrm{P(H)P}(\overline{\mathrm{C}}/\mathrm{H}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{H}})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}}/\overline{\mathrm{H}}) = 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.2 + 0.15 = 0.35$$

   Para resolver el segundo apartado, utilizaremos el teorema de Bayes:

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{H}}/\mathrm{C}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{H}})\mathrm{P}(\mathrm{C}/\overline{\mathrm{H}})}{\mathrm{P(C)}} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{1\text{-P}(\overline{\mathrm{C}})} = \frac{0.35}{0.65} = 0.538$$

2. El diámetro de las piezas fabricadas por cierta máquina sigue una distribución normal con desviación típica poblacional σ = 0 .042 cm. Se elige una muestra representativa de 200 piezas fabricadas por la máquina, resultando un diámetro medio muestral de 0.824 cm. Halla el intervalo de confianza al 95% para el diámetro medio poblacional de las piezas fabricadas por esa máquina.

Solución

Sabemos que $\boldsymbol{\sigma} = 0.042\,; \boldsymbol{n} = 200;\ \overline{\boldsymbol{x}} = 0.824$

El intervalo de confianza viene dado por

$$\boldsymbol{IC} = \left(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}, \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right)$$

Sabemos que $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z} \le \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\right) = \frac{\mathbf{1+0.95}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0.975}$ buscando en la tabla $\boldsymbol{Z}_{\alpha/2} = 1.96$

Por tanto, el intervalo buscado es:

$$\mathrm{IC} = \left(0.824 - 1.96\frac{0.042}{\sqrt{200}}, 0.824 + 1.96\frac{0.042}{\sqrt{200}}\right) = (0{,}8181; 0.8298)$$

3. En una clase con 15 alumnos de segundo de bachillerato, 2 alumnos están jugando al mus y 5 están jugando al tute, mientras que el resto de alumnos no está jugando a las cartas. Si se eligen al azar dos alumnos, ¿qué probabilidad hay de que ninguno de los elegidos estén jugando a las cartas?

Solución

Definimos los sucesos:

$\mathrm{M_i} \equiv$ El alumno seleccionado en la posición i está jugando al mus

$\mathrm{T_i} \equiv$ El alumno seleccionado en la posición i está jugando al tute

$\mathrm{J_i} \equiv$ El alumno seleccionado en la posición i está jugando a las cartas

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{J_1}} \cap \overline{\mathrm{J_2}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{J_1}})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{J_2}}/\overline{\mathrm{J_1}}) = \frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14} = 0.266$$