Semana del 20/12/21 al 26/12/21

1. Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30% de los casos legales y gana en los tribunales el 60% de los casos presentados, el bufete B recibe el 50% de los casos legales y gana el 80% de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20% de los casos legales y gana el 70% de los casos presentados.
   a) Se consideran los sucesos A = "caso adjudicado al bufete A", B = "caso adjudicado al bufete B", C = "caso adjudicado al bufete C", G = "caso ganado". Deduzca del enunciado los valores de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(G\ /\ A)$, $P(G\ /B)$, $P(G\ /\ C)$.
   b) Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales. Determine la probabilidad de que la empresa gane el caso.
   c) Si se ha ganado el caso elegido, calcule la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A.

Solución

Las probabilidades elementales para el cálculo de los apartados b y c son las siguientes:

$$\mathrm{P(A)} = 0.3\ ;\ \mathrm{P(B)} = 0.5\ ;\ \mathrm{P(C)} = 0.2$$

$$\mathrm{P(G/A)} = 0.6\ ;\ \mathrm{P(G/B)} = 0.8\ ;\ \ \mathrm{P(G/C)} = 0.7$$

El segundo apartado se puede resolver utilizando el teorema de probabilidad total, pues se verifican las condiciones para poder aplicarlo (los casos que llevan los bufetes son mutuamente excluyentes y todos los casos son llevados por uno de aquellos).

$$\mathrm{P(G)} = \mathrm{P(A)P(G/A)} + \mathrm{P(B)P(G/B)} + \mathrm{P(C)P(G/C)} = 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.72$$

El segundo apartado puede resolverse utilizando el teorema de Bayes, pues conocemos el resultado final del experimento:

$$\mathrm{P(A/G)} = \frac{\mathrm{P(A)P(G/A)}}{\mathrm{P(G)}} = \frac{0.3 \cdot 0.6}{0.72} = 0.25$$

2. El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.
   a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos?
   b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41% de los test?

Solución

Vamos a trabajar con una distribución Normal, $N(20; 4)$

Puede expresarse el primer apartado como:

$$P(16 < X < 26) = P\left(\frac{16-20}{4} < Z < \frac{26-20}{4}\right) = P(-1 < Z < 1.5) =$$

$$P(Z < 1.5)-P(Z < -1) = 0.9332-(1-P(Z < 1)) = 0.9332-(1-0.8413) = 0.7745$$

Para contestar la segunda pregunta hay que buscar dentro de la tabla de la N(0;1):

$P(Z < z_0) = 0.9641$, buscando en la tabla vemos que el valor de $z_0 = 1.8$. Por tanto, $X = 1.8 \cdot 4 + 20 = 27.2 \text{ minutos}$.

z	0	0,
0,0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	0,7257	0,7
0,7	0,7580	0,7
0,8	0,7881	0,7
0,9	0,8159	0,8
1,0	0,8413	0,8
1,1	0,8643	0,8
1,2	0,8849	0,8
1,3	0,9032	0,9
1,4	0,9192	0,9
1,5	0,9332	0,9
1,6	0,9452	0,9
1,7	0,9554	0,9
1,8	0,9641	0,9

3. El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0’25 horas.
   a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral X no supere las 2’9 horas si μ =2’75 horas.
   b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (2.9388; 3.0613) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución

Para resolver el primer apartado utilizaremos la distribución normal: $\mathrm{N}\left(2.75;\frac{0.25}{\sqrt{25}}\right)$; $\mathrm{N}(2.75;0.05)$.

La probabilidad pedida puede expresarse como:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}<2.9)=\mathrm{P}\left(\mathrm{Z}<\frac{2.9\text{-}0.05}{2.75}\right)=\mathrm{P}(\mathrm{Z}<1.036)=\frac{0.8485+0.8508}{2}=0.84965$$

Para resolver la segunda cuestión recordemos como se construía el intervalo de confianza:

$$\boldsymbol{IC}=(\,\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}},\overline{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}})$$

Si restamos los extremos del intervalo la cantidad obtenida no depende de la media, y como tenemos la desviación típica y el tamaño de la muestra podemos calcular $\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}$ y al final el nivel de confianza:

$$\overline{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\text{-}\left(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right)=2\cdot\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}=3.0613\text{-}2.9388=0.1225$$

Por tanto, $2\cdot\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}=0.1225\,;\;\;2\cdot\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{0.25}{\sqrt{64}}=0.1225\,;\;\;\text{despejando }\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}=1{,}96$

Recordando la definición de $\boldsymbol{Z}_{\alpha/2},\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z}\leq\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\right)=\frac{\mathbf{1}+(\mathbf{1}\text{-}\boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{2}}$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z}\leq1.96)=0.9750\,;\;\text{igualando}\;\;\frac{\mathbf{1}+(\mathbf{1}\text{-}\boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{2}}=0.9750\,;\;\text{despejando }1\text{-}\boldsymbol{\alpha}=0.95$$

Por tanto, el nivel de confianza es del 95%