Semana del 27/12/21 al 02/01/21

1. Una cadena de supermercados envasa tres variedades de queso en paquetes al vacío, en las proporciones que se indican: curado (45%), semicurado (30%) y tierno (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 25% del queso curado, el 23% del semicurado y el 20% del tierno. Se elige al azar un paquete de queso.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de importación?
    b. Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado?

Solución

En primer lugar, vamos a definir los sucesos y asociar las probabilidades correspondientes:

$C \equiv El\ queso\ seleccionado\ es\ curado$

$S \equiv El\ queso\ seleccionado\ es\ semicurado$

$T \equiv El\ queso\ seleccionado\ es\ tierno$

$I \equiv El\ queso\ seleccionado\ es\ de\ importación$

$P(C) = 0.45\ ;\ P(S) = 0.3\ ;\ P(T) = 0.25$

$P(I/C) = 0.25\ ;\ P(I/S) = 0.23\ ;\ P(I/T) = 0.20$

Podemos utilizar el teorema de probabilidad total, pues los sucesos C, S y T son mutuamente excluyentes y la probabilidad de la unión es 1.

Para responder a la primera pregunta:

$$P(\bar{I}) = P(C)P(\bar{I}/C) + P(S)P(\bar{I}/S) + P(T)P(\bar{I}/T)$$
$$= 0.45 \cdot 0.75 + 0.3 \cdot 0.77 + \ 0.25 \cdot 0.80 = 0{,}7685$$

Para resolver la segunda pregunta:

$$P(C/I) = \frac{P(C)P(I/C)}{P(I)} = \frac{0.45 \cdot 0.25}{1 - 0.7685} = 0.486$$

2. La probabilidad de que un alumno de Matemáticas apruebe un examen tipo test es del 80%, mientras que la probabilidad de que apruebe un examen de problemas es del 60%. Si la probabilidad de aprobar los dos exámenes es del 50%, calcula la probabilidad de que no apruebe ninguno de los dos exámenes.

   Solución

   Definimos los sucesos correspondientes:
   $T \equiv El\ alumno\ aprueba\ un\ examen\ tipo\ test$
   $R \equiv El\ alumno\ aprueba\ un\ examen\ compuesto\ de\ problemas$
   Asociamos a los sucesos sus correspondientes probabilidades:
   $P(T) = 0.8\ ;\ P(R) = 0.6\ ;\ P(T \cap R) = 0.5$
   La probabilidad de que no apruebe los dos exámenes se corresponde con la intersección de que no apruebe el de tipo test y no apruebe el de problemas:
   $P(\bar{T} \cap \bar{R}) = P(\overline{T \cup R}) = 1 - P(T \cup R)$
   Para el anterior desarrollo hemos utilizado las leyes de Morgan y la probabilidad del complementario. Por tanto, calcularemos la probabilidad de la unión:
   $$P(T \cup R) = P(T) + P(R) - P(T \cap R) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9$$
   Por tanto, la probabilidad pedida es:
   $P(\bar{T} \cap \bar{R}) = P(\overline{T \cup R}) = 1 - P(T \cup R) = 1 - 0.9 = 0.1$

3. Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.
   a. Halla el intervalo de confianza del 90% para el sueldo medio de un trabajador.
   b. Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10 €, con una confianza del 99%, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

Solución

Para resolver el primer apartado utilizaremos la distribución normal: $N\left(1480; \frac{250}{\sqrt{625}}\right)$; $N(1480; 10)$.

Recordemos como se construía el intervalo de confianza:

$$\boldsymbol{IC} = (\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}, \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}) = \left(\mathbf{1480} - \boldsymbol{Z}_{\alpha/2} \cdot \mathbf{10}; \mathbf{1480} + \boldsymbol{Z}_{\alpha/2} \cdot 10\right)$$

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\right) = \frac{\mathbf{1 + 0.9}}{\mathbf{2}} = 0.96 \; ; \; \boldsymbol{Z}_{\alpha/2} = 1.645$$

Por tanto, el intervalo de confianza es:

$$(\mathbf{1480} - 1.645 \cdot \mathbf{10}; \mathbf{1480} + 1.645 \cdot 10) = (\mathbf{1463.55}; \mathbf{1496.45})$$

El error máximo viene dado por:

$$\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\mathbf{250}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\mathbf{250}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \leq 10$$

Calculamos $\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99%:

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\right) = \frac{\mathbf{1 + 0.99}}{\mathbf{2}} = 0.995 \; ; \; \boldsymbol{Z}_{\alpha/2} = 2{,}575$$

Sustituyendo en la anterior expresión:

$$\boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\mathbf{250}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \leq 10 \; ; \; 2{,}575 \cdot \frac{\mathbf{250}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \leq 10 \; ; \; n \geq \left(\frac{2{,}575 \cdot 250}{10}\right)^2 = 4144.140625$$

Por tanto, el número de la muestra debe ser de 4145 trabajadores.