Semana del 03/01/22 al 09/01/22

1. Se sabe que el gasto semanal en ocio de los jóvenes de una ciudad tiene distribución normal de desviación típica 6 euros. Se toma una muestra de 10 jóvenes y se les pregunta el gasto en ocio de la última semana, con los siguientes resultados (expresados en euros):
   24,5 11 16,5 18,5 21,5 25 6,5 12 10,5 9,5
   Construya un intervalo de confianza de nivel 94% para la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad.
   Solución
   Calcularemos la media de gasto de los diez jóvenes:
   $$\overline{X} = \frac{24{,}5 + 11 + 16{,}5 + 18{,}5 + 21{,}5 + 25 + 6{,}5 + 12 + 10{,}5 + 9{,}5}{10} = 15{,}55$$
   El intervalo de confianza viene dado por:
   $$\boldsymbol{IC} = \left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$
   Calculemos $Z_{\alpha/2}$ sabiendo que $P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = \frac{1+0.94}{2} = 0.97$ buscando en la tabla $Z_{\alpha/2} = 1{,}88$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	[illegible]
[illegible]	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	[illegible]
1.8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761

   Por tanto,
   $$\boldsymbol{IC} = \left(15{,}55 - 1{,}88\frac{6}{\sqrt{10}}, 15{,}55 + 1{,}88\frac{6}{\sqrt{10}} \right) = (11.98, 19.11)$$

2. Un concesionario se dedica a la venta de tres modelos de coches: A, B y C. En el concesionario trabajan dos vendedores: María y Pedro. El mes pasado María realizó el 55% de las ventas y Pedro el 45% restante. Además, de las ventas de María, un 60% fueron del modelo A, un 30% del modelo B y un 10% del modelo C. De las ventas de Pedro, un 50% fueron del modelo A, un 20% del modelo B y un 30% del modelo C.

a. Elegimos al azar una de las ventas realizadas el mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un coche del modelo B vendido por María?
b. Elegimos al azar una de las ventas de mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?
c. Elegimos al azar una de las ventas de modelo B del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una venta de María?
d. Elegimos al azar (con reemplazamiento) dos ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María?

Solución

En primer lugar, definimos los siguientes sucesos:

$\mathrm{M} \equiv \text{El coche ha sido vendido por María}$
$\mathrm{R} \equiv \text{El coche ha sido vendido por Pedro}$
$\mathrm{A} \equiv \text{El coche vendido es del modelo A}$
$\mathrm{B} \equiv \text{El coche vendido es del modelo B}$
$\mathrm{C} \equiv \text{El coche vendido es del modelo C}$

A continuación, asignamos las correspondientes probabilidades a cada uno de los sucesos correspondientes:

$\mathrm{P(M)} = 0.55\ ;\ \mathrm{P(R)} = 0.45$
$\mathrm{P(A/M)} = 0.6\ ; \mathrm{P(B/M)} = 0.3\ ;\ \mathrm{P(C/M)} = 0.1$
$\mathrm{P(A/R)} = 0.5\ ; \mathrm{P(B/R)} = 0.2\ ;\ \mathrm{P(C/R)} = 0.3$

La primera pregunta puede expresarse como:

$\mathrm{P(M \cap B)} = \mathrm{P(B/M)} \cdot \mathrm{P(M)} = 0.3 \cdot 0.55 = 0.165$, hemos utilizado la fórmula para la probabilidad condicionada.

Para resolver la segunda cuestión utilizaremos el teorema de probabilidad total, pues se cumplen las condiciones para poder utilizarlo:

$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P(M)P(B/M)} + \mathrm{P(R)P(B/R)} = 0.55 \cdot 0.3 + 0.45 \cdot 0.2 = 0.255$

Para resolver la tercera pregunta, utilizaremos el teorema de Bayes:

$$\mathrm{P(M/B)} = \frac{\mathrm{P(B/M)P(M)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{0.3 \cdot 0.55}{0.255} \approx 0{,}6471$$

Definiremos los sucesos:

$\mathrm{M_1} \equiv \text{La primera venta es de María}\ ;\ \mathrm{M_2} \equiv \text{La segunda venta es de María}$

La probabilidad que nos piden es mejor calcularla utilizando el complementario: "La primera venta no es de María y la segunda venta es de María". Además, como hay reemplazamiento los sucesos son independientes:

$$\mathrm{P}(\text{Al menos una de las dos ventas es de María}) = 1\text{-}\mathrm{P}(\overline{\mathrm{M_1}} \cap \overline{\mathrm{M_2}}) = 1\text{-}\mathrm{P}(\overline{\mathrm{M_1}})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{M_2}}) = 1\text{-}0.45 \cdot 0.45 = 0.7975$$

3. Dados los sucesos A y B tales que $P(A) = 0.6\ P(B) = 0.8\ y\ P(A/B) = 0.7$, calcular $P(A \cap B)\ y\ P(A \cup B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

Solución

$$0.7 = P(A/B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P(B)}} = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{0.8} \text{ por tanto } \mathrm{P}(A \cap B) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$$

$$P(A \cup B) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} \text{-} \mathrm{P(A} \cap B) = 0.6 + 0.8 \text{-} 0.56 = 0.84$$

Recordemos que A y B son independientes, si y sólo si, la probabilidad de su intersección coincide con el producto de sus probabilidades:

$$\mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B)} = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}64 \neq 0.56 = \mathrm{P}(A \cap B)$$

Por tanto, los sucesos no son independientes.