Semana del 10/01/22 al 16/01/22

1. En una fábrica de calzado de Amedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.
   a. Si la media de la producción fuese de 1200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1255 pares de zapatos?
   b. Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media de la producción.

Solución

La distribución a utilizar en el primer apartado es $N\left(1200;\frac{200}{\sqrt{36}}\right)$. La probabilidad pedida es $P(X > 1255)$:

$$P(X > 1255) = P\left(Z > \frac{1255\text{-}1200}{\frac{200}{\sqrt{36}}}\right) = P(Z > 1.65) = 1\text{-}P(Z \leq 1.65)$$
$$= 1\text{-}0.9505 = 0.0495$$

Para resolver la segunda pregunta utilizaremos la distribución $N\left(1180;\frac{200}{\sqrt{100}}\right)$. El intervalo de confianza para la media viene dado por:

$$\boldsymbol{IC} = \left(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}, \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right)$$

Sabemos que $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{Z}_{\alpha/2}\right) = \frac{\mathbf{1+0.85}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0.925}$ buscando en la tabla $\boldsymbol{Z}_{\alpha/2} = \mathbf{1}.435$

Por tanto, el intervalo buscado es:

$$\text{IC} = (1180 - \mathbf{1}.435 \cdot 20; 1180 + \mathbf{1}.435 \cdot 20) = (1151{,}2; 1208{,}8)$$

2. De los habitantes de Logroño se sabe que tres cuartas partes han visitado en alguna ocasión San Sebastián y tres quintas partes han estado alguna vez en Zaragoza. Además, un cuarenta por ciento de los logroñeses reconoce haber visitado ambas ciudades.
    a. Si mi amigo Juan, que es de Logroño, me ha dicho que el otro día estuvo comiendo en San Sebastián, ¿cuál es la probabilidad de que haya estado también en Zaragoza en alguna ocasión?
    b. Luis, otro amigo mío de Logroño, es de poco viajar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya visitado ninguna de las dos ciudades?

Solución

En primer lugar, definiremos los siguientes sucesos:

$\mathrm{Z} \equiv \text{Ha visitado Zaragoza; } \mathrm{S} \equiv \text{Ha visitado San Sebastián}$

El enunciado puede traducirse como:

$$\mathrm{P(S)} = \frac{3}{4} = 0.75\ ;\ \mathrm{P(Z)} = \frac{3}{5} = 0.6\ ;\ \mathrm{P(Z \cap S)} = 0.4$$

Sabemos que Juan ha estado en San Sebastián, por tanto, nos piden la siguiente probabilidad condicionada:

$$\mathrm{P(Z/S)} = \frac{\mathrm{P(Z \cap S)}}{\mathrm{P(S)}} = \frac{0.4}{0.75} = 0{,}53$$

Podemos expresar la segunda pregunta como:

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{Z}} \cap \bar{\mathrm{S}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{Z} \cup \mathrm{S}}) = 1\text{-}\mathrm{P}(\mathrm{Z} \cup \mathrm{S}) = 1\text{-}(0.75 + 0.6\text{-}0.4) = 1\text{-}0.95 = 0.05$$

3. En una caja tenemos inicialmente una bola negra y otra roja. Cada vez que extraemos una bola, introducimos tres bolas del color de la extraída. Sacamos una primera bola y procedemos a hacer la reposición, sacamos una segunda bola y reponemos y sacamos una tercera bola.
Determinar la probabilidad de que en las tres extracciones hayamos sacado bolas del mismo color.
Determinar la probabilidad de que en las tres extracciones hayamos sacado dos bolas del mismo color y otra de color distinto.

Solución

Llamaremos a los sucesos de la siguiente forma:

$$\mathrm{N_i} \equiv \text{En la extracción i hemos obtenido una bola negra}$$

$$\mathrm{R_i} \equiv \text{En la extracción i hemos obtenido una bola negra}$$

La primera pregunta podemos resolverla de la siguiente forma: o las tres bolas extraídas han sido negras o han sido rojas, ambos sucesos son incompatibles, así que podemos poner:

$$P\big((N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (R_1 \cap R_2 \cap R_3)\big) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$$

Los sucesos $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ no son independientes pues la extracción de una bola implica la modificación de la urna:

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1)P(N_2/N_1)P(N_3/N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48} = 0.3125$$

El caso de las bolas rojas es simétrico, por tanto, tendrá asignada la misma probabilidad. Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = 0.3125 + 0.3125 = 0.625$$

El segundo apartado es complementario del anterior, pues únicamente pueden darse dos bolas de igual color o tres de igual color. Por tanto, la probabilidad pedida es 1-0.625=0.375