Semana del 21/02/22 al 27/02/22

1. Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386 € de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 €. ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio?

   Solución

   En primer lugar, definimos las variables de decisión:

   $$x \equiv \textit{Número clientes que son empresas}\;;\; y \equiv \textit{Número de clientes particulares}$$

   Las restricciones son:

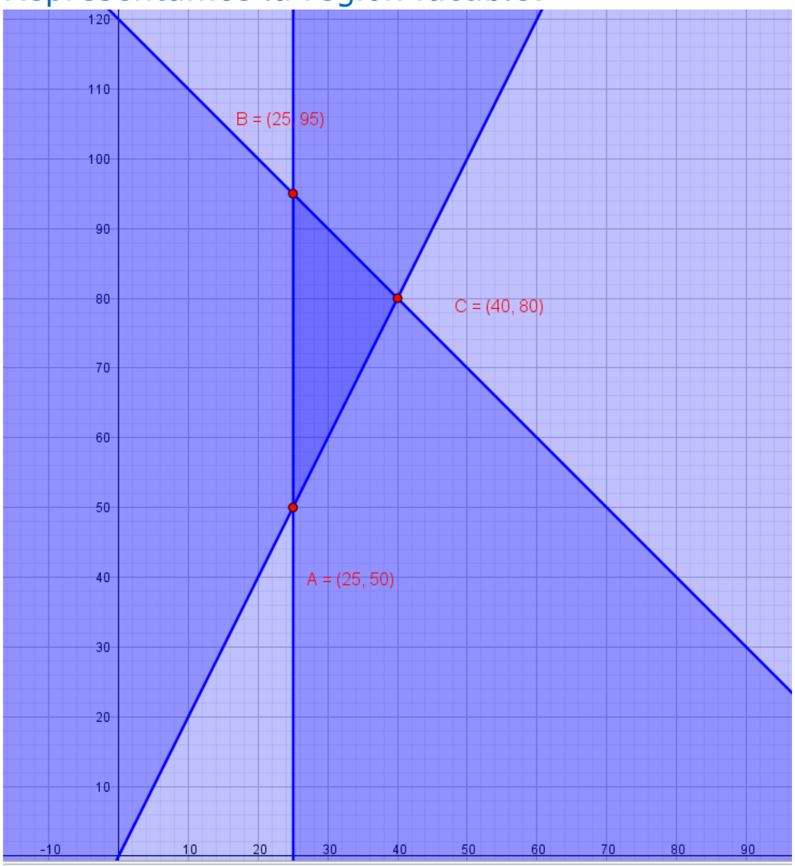
   "Al menos 25 empresas como clientes" $x \geq 25$

   "El número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas" $y \geq 2x$

   "Tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales" $x + y \leq 120$

   La función objetivo es: $F(x, y) = 386x + 229y$

   Representamos la región factible:



El punto A (25,50) se ha calculado resolviendo el sistema formado por: $\begin{cases} x = 25 \\ y = 2x \end{cases}$

El punto B (25,95) se ha calculado resolviendo el sistema formado por: $\begin{cases} x = 25 \\ x + y = 120 \end{cases}$

El punto C (40,80) se ha calculado resolviendo el sistema formado por: $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 120 \end{cases}$

Recuerda que es importante, para poder para calcular las coordenadas de los vértices, etiquetar las rectas que limitarán la región factible.

Ahora, sabemos que el valor óptimo se alcanza en los vértices de la región factible. Por tanto, evaluamos la función:

$A\ (25{,}50)\ ;\ F(25{,}50) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 50 = 21.100$

$B\ (25{,}95)\ ;\ F(25{,}95) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 95 = 31.405$

$C\ (40{,}80)\ ;\ F(25{,}95) = 386 \cdot 40 + 229 \cdot 80 = 33.760$

Por tanto, el máximo beneficio es de 33.760 que se alcanza al disponer de 40 clientes que sean empresas y 90 clientes que sean particulares.

2. La puntuación obtenida por los participantes en una prueba es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con una desviación típica de 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 64 participantes en esa prueba, resultando una puntuación media de 35 puntos.
    a. Calcule un intervalo de confianza, al 95 %, para la calificación media del total de participantes en la citada prueba.
    b. Halle el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la puntuación media del total de participantes, con un error inferior a 0.5 puntos y un nivel de confianza del 99%.

Solución

Para resolver el primer apartado utilizaremos la distribución normal: $N\left(35; \frac{6}{\sqrt{64}}\right)\ ;\ N(35; 0.75)$.

Recordemos como se construía el intervalo de confianza:

$$\boldsymbol{IC = (\ \overline{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$$

Siendo $\boldsymbol{Z_{\alpha/2}}$, el valor de la tabla de la N(0;1) que cumple $\boldsymbol{P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = \frac{1+(1-\alpha)}{2}} = \frac{1+0.95}{2} = 0.975$, buscando en la tabla: $\boldsymbol{Z_{\alpha/2}} = 1.96$.

Por tanto, el intervalo de confianza queda:

$$\boldsymbol{IC} = (\ 35 - 1.96 \cdot 0.75, 35 + 1.96 \cdot 0.75) = (33{,}53; 36{,}47)$$

Para resolver la segunda pregunta tendremos que recordar que un intervalo de confianza se encuentra centrado en la media y por tanto el error es el valor $Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, como nos preguntan por el tamaño de la muestra para que el error no supere 0.5 podemos poner:

$$Z_{\alpha/2}\frac{6}{\sqrt{n}} \leq 0.5$$

Calculamos el valor de $Z_{\alpha/2}$ correspondiente a un nivel de confianza del 99% y obtendremos una inecuación que podremos utilizar para calcular n.

$$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = \frac{1+(1-\alpha)}{2} = \frac{1+0.99}{2} = 0.995$$

Buscando en la tabla: $Z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

Sustituyendo en la inecuación:

$$Z_{\alpha/2}\frac{6}{\sqrt{n}} \leq 0.5\ ;\ 2{,}575\frac{6}{\sqrt{n}} \leq 0.5\ ;15{,}45\ \leq 0.5\sqrt{n}\ ;\ \frac{15{,}45}{0.5}\ \leq \sqrt{n}\ ;$$

$$30.9 \leq \sqrt{n}\ ;\ \ 954{,}81 \leq \mathrm{n}$$

Por tanto, la muestra debe superar los 955 participantes.

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
   a. Calculad la matriz A^{2017}
   b. ¿Se verifica la expresión $(B+A)\cdot(B\ -\ A) = B^2\ -\ A^2$?

Solución

Vamos a ir formando las potencias es orden creciente de la matriz A para ver si podemos predecir el comportamiento de las sucesivas potencias:

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{A}$$

$$\mathrm{A}^4 = \mathrm{A}^3\cdot\mathrm{A} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{A} = \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, podemos concluir que $A^{2017} = \mathrm{A}$, pues su exponente es impar.

Para resolver el segundo apartado, construyamos las matrices:

$$B+A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\text{-}A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B}+\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}\ -\ \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^2 - A^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Como podemos comprobar ambas expresiones son distintas.