Álgebra lineal

1. En un almacén un mayorista compra 5 unidades de un producto A, 4 de B y 3 de C, pagando un total de 8.600 €. Otro cliente compra 2 paquetes de A, 7 de B y 4 de C, gastando 7.300 €. Un tercer cliente compra 8 de A, 13 de B y 5 de C, pagando lo que los otros dos juntos. ¿Cuánto vale cada producto?.
2. Una gran multinacional destina 900.000 € para gratificar a sus 51 empleados. Concede 25.000 € a los empleados de nivel A, 20.000 a los de nivel B y 15.000 a los de nivel C. Teniendo en cuenta que para los de nivel B destina en total el doble que para los del A, ¿cuántos empleados hay en cada nivel?.
3. La suma de las edades de tres personas es, en el momento actual, 73 años. Dentro de 10 años la edad de la mayor de ellas será el doble de la edad de la persona más joven. Hace doce años la persona con edad intermedia tenía el doble de años que la más joven. Hallar las edades de las tres personas.
4. La edad de un padre es igual a la suma de las de sus dos hijos. Cuando pasen tantos años como tiene el hijo mayor, el padre tendrá 70 años y la suma de las edades de los tres será de 164 años. ¿Qué edad tiene ahora cada uno?
5. Tres amigos suben a una báscula de dos en dos: Andrés y Benjamín suman 173 kg, Andrés y Carlos 152 kg, mientras que entre Benjamín y Carlos pesan 165 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?.
6. Un modisto ofrece cuatro tipos de tejido de gran calidad a distintos precios. Un comprador gastó 7.000 € en 2 m del primero, 3 m del segundo y 1 m del tercero. Otro gastó 6.500 € comprando 1 m del primero, 2 m del segundo y 2 m del cuarto. Un tercero compró 3 m del primero, 3 m del tercero y 2 m del cuarto, gastando 7.000 €. Al vendedor le sobraron 2 m, 1 m, 2 m y 1 m respectivamente, por un valor de 5.750 €. ¿Cuál era el precio de cada tejido?.
7. En una mesa de una cafetería tomaron dos cafés, 1 refresco y dos tés, costándoles 5,30 €. En otra mesa pagaron 8,40 € por tres cafés, 3 refrescos y 1 té. Por otra parte, dos amigos tomaron un café y un refresco en la barra, donde el precio es un 10% más barato, pagando 2,25 €. ¿Qué cuesta cada bebida?.
8. Un especulador tiene colocado su dinero en tres depósitos bancarios diferentes X, Y y Z. El dinero invertido en X le produce un 4% de beneficio, en Y un 7%, y en Z un 6%. Sus beneficios totales fueron de 327.000 € anuales. Debido a la bajada de tipos motivada por la crisis, el segundo año el rendimiento es del 3.5% en X, el 6% en Y y el 5% en Z, siendo sus beneficios de 278.000 €. ¿Cuánto dinero tiene invertido en cada depósito si en total tiene 5.000.000 €?.
9. Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

    a. Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

    b. Resolver el problema
10. Cierto estudiante obtuvo, en un control que constaba de 3 preguntas, una calificación de 8 puntos. En la segunda pregunta sacó dos puntos más que en la primera y un punto menos que en la tercera.

    c. Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la puntuación obtenida en cada una de las preguntas.

d. Resolver el sistema.

11. Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 1, 1,20 y 1,50 €/kg., respectivamente. El importe total de la compra fueron 11,60 €. El peso total de la misma fue de 9 kg. Además, compró 1 kg. mas de naranjas que de manzanas.

    e. Plantear un sistema para determinar la cantidad comprada de cada producto.

    f. Resolver el problema.

12. En una confitería envasan los bombones en cajas de 250 gr., 500 gr. Y 1 kg. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gr.) que de tamaño mediano (500 gr.). Sabiendo que el precio del kg. de bombones es 40 €. y que el importe total de los bombones envasados asciende a 1250 €:

    a. Plantear un sistema para determinar cuántas cajas se han envasado de cada tipo.

    b. Resolver el problema.

13. El precio de entrada a cierta exposición es de 2 € para los niños, 5 € para los adultos y 2,5 € para los jubilados. En una jornada concreta, la exposición fue visitada por 200 personas en total, igualando el número de visitantes adultos al de niños y jubilados juntos. La recaudación de dicho día ascendió a 735 €.

    a. Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos niños, adultos y jubilados visitaron la exposición ese día.

    b. Resolver el problema.

14. Una autoescuela tiene abiertas 3 sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera. Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera.
    g. Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar el número de alumnos matriculados en cada sucursal.
    h. Resolverlo.

15. El tío Evaristo ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 euros (sin impuestos). El valor del vino es 60 euros menos que el de los refrescos y el de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que por los refrescos debe pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por el vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 592’4 euros. Calculad la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

16. Una marca comercial utiliza tres ingredientes (A, B y C) en la elaboración de tres tipos de pizzas (P1, P2 y P3). P1 se elabora con 1 unidad de A, 2 de B y 2 de C; P2 con 2 unidades de A, 1 de B y 1 de C y P3 con 2 unidades de A, 1 de B y 2 de C. El precio de venta es de 7.21 € para P1, 6.16 € para P2 y 7.36 para P3.
    Sabiendo que el margen comercial (beneficio) es de 2.4 € en cada una de ellas, ¿qué le cuesta a dicha marca comercial cada unidad de A, B y C?. Justificar la respuesta.

17. Resolved los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a. $\begin{cases} x-2y+5z=13 \\ 2x-5y+z=19 \\ x+3y-2z=-4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-y+z=7 \\ x+y-3z=1 \\ 2x+y-4z=5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x-2y+z=13 \\ 3x-4y+2z=1 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x-2y+z=13 \\ 3x-4y+2z=1 \\ 2x-2y+z=-12 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ x+3y=6 \\ 2x+17y-z=3 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x-y+z=2x-1 \\ 2x+y-z=3-y \\ x-y+3z=1+z \end{cases}$

g. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+z=4 \\ y-3z=-15 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x+2y-3z=13 \\ 2x-y=6 \\ 4x+3y-6z=24 \end{cases}$

18. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x + ky + 2z = 5 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función de los valores de k.
b) Resolver el sistema para el valor $k = 2$.

19. Estudiar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -y - z = -1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$$

20. Calculad los valores de a para los cuales la matriz inversa de A coincide con su traspuesta:

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$$

21. Hallar todas las matrices X, tales que X2=2X, siendo
$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ $con\ a, b, c\ \in \mathbb{R}$

22. Se dice que una matriz es ortogonal si $A \cdot A^t = I$.

    a. Estudiad si la matriz $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es ortogonal
    b. Siendo A la matriz del anterior apartado, resolver el sistema
    $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

23. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 9 \\ 3x - 2y + z = 20a \\ x + y + 2az = 9 \end{cases}$$

    a. Discutir el sistema dependiendo del valor del parámetro
    b. Resolver el sistema cuando el sistema tenga infinitas soluciones
    c. Resolver el sistema cuando a=2.

24. Encontrar todas las matrices X, de 2x2, que verifican la siguiente igualdad: AX=XA. En los siguientes casos
    a. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
    b. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

25. Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ -2x+3y+z=1 \\ -x+ay+3z=3 \end{cases}$$

a. Discutir el sistema para los distintos valores de a
b. Resolver el sistema para a=2

26. Calcula el valor de m para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible indeterminado y escribe las infinitas soluciones (Aplica el método de Gauss).

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ 4x-y-2z=1 \\ 2x-4y-z=-3 \\ 2x-my-z=4 \end{cases}$$

27. La suma de las edades actuales de tres hermanos es 63 años. Hace dos años, la edad del mediano era 5 años más que un tercio de la suma de las edades de los otros dos, y dentro de cuatro años, el menor tendrá 9 años más que la quinta parte de la suma de los otros dos. Halla las edades actuales de cada uno de los hermanos.
28. Calcula el valor de a para que el siguiente sistema homogéneo tenga soluciones diferentes de la trivial:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ ax+3y+4z=0 \\ ax+ay+2z=0 \end{cases}$$

Escribe las soluciones del anterior sistema para a = 1.
29. En una tienda de regalos se adquiere un libro y una pulsera. La suma de los precios que marcan los dos productos es de 35 euros, pero el dependiente informa al cliente de que los libros están rebajados el 6%, y las pulseras, el 12%, por lo que en realidad debe pagar 31,40 euros.
¿Qué precio marcaban el libro y la pulsera?

¿Qué precio se ha pagado finalmente por cada uno de estos dos productos?

30. Determina la medida de cuatro pesas de una balanza si se sabe que pesadas en grupos de 3 dan como resultado 9, 10, 11 y 12 gramos.
31. Estudia los siguientes sistemas homogéneos según los valores del parámetro ***a*** y resuélvelos:

a) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+ay+3z=0 \\ 3x+2y+6az=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+2y-z=0 \\ x+ay-3z=0 \\ 3x+5y-2z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - ay + 3z = 0 \\ x + ay - 2z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

32. Efectúa, si es posible la siguiente operación matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

33. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Calcula $(A+B)C^t$
b. Comprueba que $(A+B)C^t = A \cdot C^t + B \cdot C^t$

34. Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calcula $M^2 - N^2$
b. Calcula $(M+N)(M-N)$
c. Explica la razón por la que $M^2 - N^2 \neq (M+N)(M-N)$

35. Dada la matriz $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $A^{-1} \; y \; A^t$
b) $(A^t A^{-1})^2 A$

36. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A^{-1}, B^{-1}, (2A)^{-1} \; y \; \left(\frac{1}{3}B\right)^{-1}$
b) Comprueba que $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$
c) Comprueba que $\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1} = 3B^{-1}$
d) Comprueba que $\left[(2A)\left(\frac{1}{3}B\right)\right]^{-1} = \frac{3}{2}B^{-1}A^{-1}$