1. Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

    a. Determínense sus asíntotas

    b. Calcúlense sus máximos y mínimos locales. Esbócese la gráfica de f.

    c. Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las rectas verticales x=2, x=3, la gráfica de la función f y la recta de ecuación y=x+1.

Solución

Asíntotas verticales:

Como puede observarse, el denominador se anula para x=1. Estudiaremos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

Por tanto, existe una asíntota vertical en x=1

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

Por tanto, no existen asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:

Tienen la forma y=mx+n

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x){:}\,x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+x}{x-1} = 1$$

La asíntota oblicua es y=x+1

Para calcular sus máximos y mínimos, calcularemos los puntos críticos y estudiaremos los valores de la derivada en su entorno:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Calculamos los puntos críticos igualando a cero la función derivada:

$$f'(x) = 0 \; ; \; \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \; ; \; x^2 - 2x = 0 \; ; \; \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada:

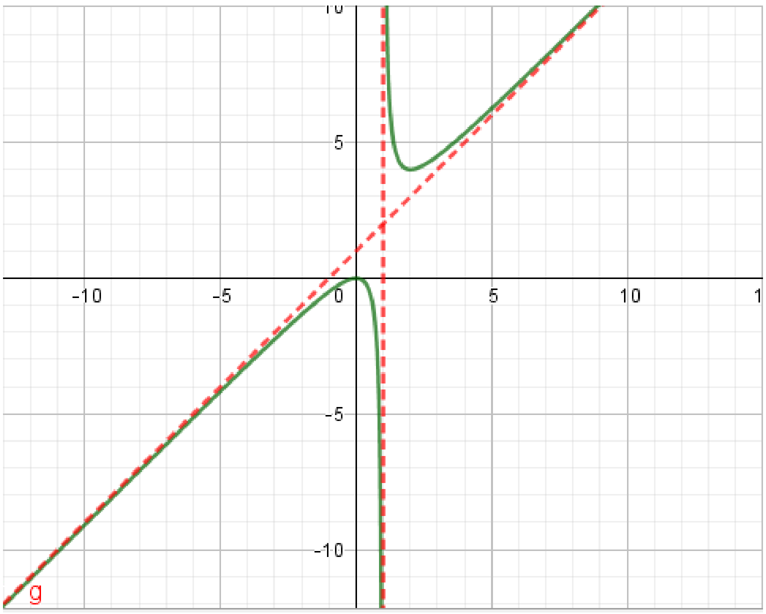
Si x <0, $f'(x) > 0$, f es creciente

Si 0<x<1, $f'(x) < 0$, f es decreciente

Si 1<x<2, $f'(x) < 0$, f es decreciente

Si x>2, $f'(x) > 0$, f es creciente

En x=0, la función tiene un máximo y en x=2 la función tiene un mínimo.



La recta y=x+1 queda por debajo de la gráfica entre 2 y 3, por tanto, el área que nos piden se puede calcular utilizando la siguiente integral:

$$A = \int_2^3 \frac{x^2}{x-1} - x - 1dx = F(3) - F(2) = Ln2 - Ln1 = 0.69$$

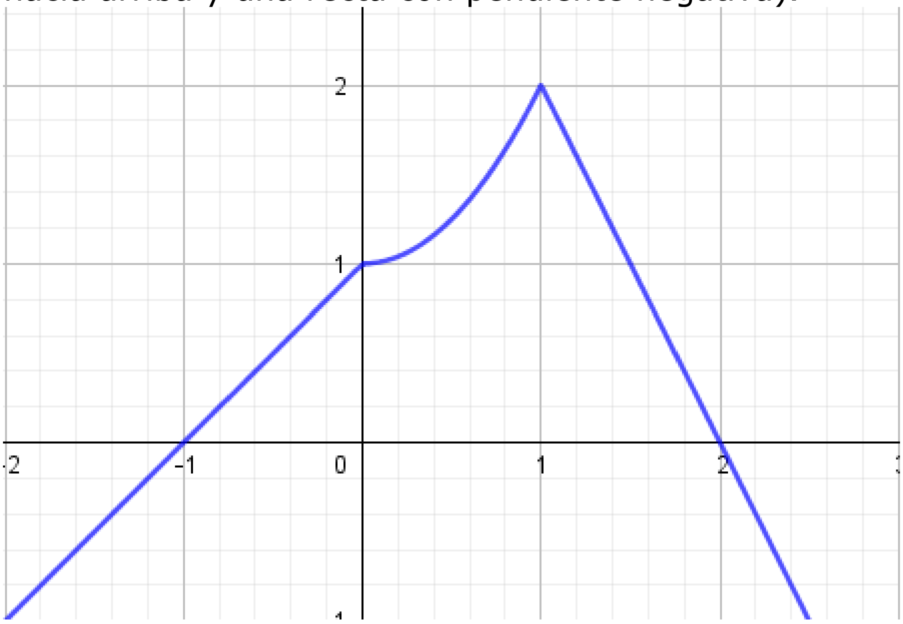
$$F(x) = \int \frac{x^2}{x-1} - x - 1dx = \int \frac{1}{x-1} dx = Ln(x-1)$$

2. Calcula el área del limitado por la función f y el eje de abscisas:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \; si \; x < 0 \\ x^2 + 1 \; si \; 0 \leq x < 1 \\ -2x + 4 \; si \; x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

En primer lugar representaremos la función (se trata de un trozo de recta creciente, un trozo de parábola con las ramas hacia arriba y una recta con pendiente negativa).



El área puede ser calculada utilizando la siguiente integral:

$$Área = \int_{-1}^{0} x + 1 \, dx + \int_{0}^{1} x + 1 \, dx + \int_{1}^{2} -2x + 4 \, dx = 2.83$$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$ en el punto de abscisa 2.

Solución

Calculamos el valor de la función en x=2.

$$f(2) = \sqrt{2^2 - 3 \cdot 2 + 6} = 2$$

Calculamos la derivada de la función. Su valor en x=2 será la pendiente de la recta pedida.

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 6}};\ f'(2) = \frac{1}{4}$$

Por tanto, la recta tiene la forma $y = \frac{1}{4}x + n$. Como la recta tiene que pasar por el punto (2,2).

$$y = \frac{1}{4}x + n\,; 2 = \frac{1}{2} + n\,; n = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la recta tangente es: $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

4. Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál será ese beneficio?

Solución

Sea x el número de céntimos que sube el precio. La función para el cálculo de beneficios es:

$$f(x) = (50 + x) \cdot (200 - 2x) - 40 \cdot (200 - 2x) = -2x^2 + 180x + 200$$

Derivando:

$$f'(x) = -4x + 180\,;\ -4x + 180 = 0\,; x = 45\,; f(45) = 6050\ céntimos$$

El beneficio máximo es de 60,50 euros, vendiendo a 95 céntimos el helado y haciendo 110 helados.

5. Dada la función $f(x) = 5xe^{x-1}$ calculad los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución

Derivando la función: $f'(x) = 5e^{x-1} + 5xe^{x-1} = e^{x-1}(5 + 5x)$

Calculando los puntos críticos: $f'(x) = 0$; $5 + 5\mathrm{x} = 0$; $\mathrm{x} = -1$

Estudiemos el signo de la derivada a la derecha e izquierda de x=-1

Si x < -1 $f'(x) < 0$ la función es decreciente

Si x > -1 $f'(x) > 0$ la función es creciente

Por tanto, en x=-1 hay un mínimo relativo.